حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريا و بيانيًا

تمهيد : نعلم أن :

(أ) المعادلة : هى جملة رياضية تتضمن علاقة تساوى بين عبارتين رياضيتين

(ب) المعادلة : ٣ س + ١ = ١٠ من الدرجة الأولى فى متغير واحد

(حـ) حل المعادلة : هو التوصل إلى قيمة المجهول (الرمز) الموجود بالمعادلة

(ء) خواص علاقة التساوى :

إذا كان أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد فى " ط ، صـ " فإن :

(١) الإضافة : إذا كان : أ = ب فإن : أ + حـ = ب + حـ

فمثلا : إذا كان : أ – ١ = ٣ فإن : أ = ٤ (بإضافة ١ للطرفين)

(٢) الحذف : إذا كان : أ = ب فإن : أ – حـ = ب – حـ

فمثلا : إذا كان : أ + ٣ = ٧ فإن : أ = ٤ (بطرح ٣ من الطرفين)

(٣) الضرب : إذا كان : أ = ب فإن : أ × حـ = ب × حـ

فمثلا : إذا كان : $\frac{أ}{٣}$ = ٤ فإن : أ = ١٢ (بضرب الطرفين × ٣)

(٤) القسمة : إذا كان أ = ب فإن : أ ÷ حـ = ب ÷ حـ ، حيث : حـ ≠ صفر

فمثلا : إذا كان ٥ أ = ١٥ فإن : أ = ٣ (بقسمة الطرفين على ٥)

٢ – (أ) المعادلة : أ س + ب ص + حـ = ٠ حيث : أ ، ب ، حـ ثوابت

تسمى معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين هما س ، ص

(ب) حل هذه المعادلة يعنى إيجاد مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) التى تحقق المعادلة بحيث تكون مجموعة التعويض هى : ع × ع ما لم يذكر خلاف ذلك

فمثلاً : لحل المعادلة س + ص = ٦

بإستخدام خواص التساوى يمكن وضع المعادلة على الصورة :

س = ٦ – ص أو الصورة : ص = ٦ – س

و بإعطاء قيم للمتغير بالطرف الأيسر يمكن حساب قيمة المتغير بالطرف الأيمن كما يلى : فى الصورة : س = ٦ – ص

عند ص = ١ ∴ س = ٦ – ١ = ٥ ∴ (٥ ، ١) يكون حلاً للمعادلة

عند ص = ٢ ∴ س = ٦ – ٢ = ٤ ∴ (٤ ، ٢) يكون حلاً للمعادلة

عند ص = ٣ ∴ س = ٦ ــ ٣ = ٣ ∴ (٣ ، ٣) يكون حلاً للمعادلة

عند ص = $\sqrt{٥}$ ∴ س = ٦ ــ $\sqrt{٥}$

∴ (٦ ــ $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$) يكون حلاً للمعادلة

عند ص = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٦ ــ $\frac{١}{٢}$ = ٥$\frac{١}{٢}$

∴ (٥$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) يكون حلاً للمعادلة ٠٠٠٠٠ و هكذا

(حـ) مثل هذه المعادلة يكون لها عدد لا نهائى " غير منته " من الحلول

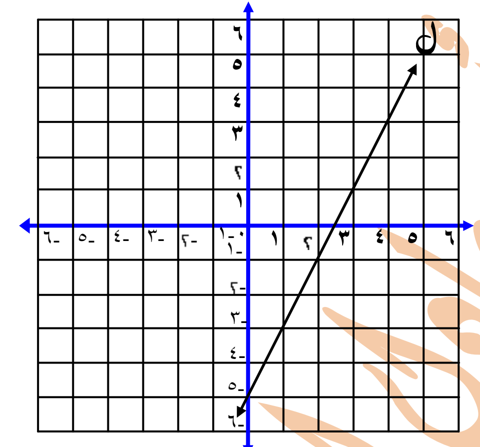
و يمكن أن تكتب مجموعة حل المعادلة على الصورة :

مجموعة الحل = { (س ، ص) : س = ٦ ــ ص }

(ء) كل الأزواج المرتبة التى تكون حلاً للمعادلة يمكن تمثيلها بنقط على المستوى الإحداثى و بتوصيل هذه النقط نحصل على الخط المستقيم الذى يمثل المعادلة بيانياً

أولاً : حل معادلات الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً

مثـــال : أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ س ــ ص = ٥ بيانياً



الحـــــــل

نكتب المعادلة على الصورة : ص = ٢ س ــ ٥

بوضع س = ١ ∴ ص = ــ ٣

∴ (١ ، ــ ٣) يكون حلاً للمعادلة

بوضع س = ٣ ∴ ص = ١

∴ (٣ ، ١) يكون حلاً للمعادلة

برسم المستقيم ل المار بالنقطتين الممثلتين للزوجين المرتبين

(١ ، ــ ٣) ، (٣ ، ١) نجد أن كل نقطة ∈ ل تمثل حلاً للمعادلة

أى أن : المعادلة : ٢ س ــ ص = ٥ لها عدد لا نهائى من الحلول

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين

إذا كان لدينا المعادلتين :

$أ_١ س + ب_١ ص + ح_١ = ٠$ ، $أ_٢ س + ب_٢ ص + ح_٢ = ٠$

فإن حل هاتين المعادلتين معاً يقصد به إيجاد الأزواج المرتبة التى تحقق كلاً منهما فى آن واحد لذا يسمى حل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى فى متغيرين و نحصل عليها من تقاطع المستقيمين الممثلين لكل منهما حيث تكون نقطة التقاطع هى الحل المشترك للمعادلتين

مثـ٢ـال : أوجد مجموعة حل المعادلة : ص = ٢ س – ٣ ، ص = س – ١

الحــــــــــل

لتمثيل المعادلة الأولى بيانياً بالخط المستقيم $ل_١$

نكون الجدول التالى : ص = ٢ س – ٣

س	٠	١	٢
ص	– ٣	– ١	١

لتمثيل المعادلة الثانية بيانياً بالخط المستقيم $ل_٢$

نكون الجدول التالى : ص = س – ١

س	٠	١	٢
ص	– ١	٠	١

و نرسم كلاً من المستقيمين على نفس المستوى الإحداثى نوجد نقطة تقاطعهما فتكون هى مجموعة الحل ∴ مجموعة الحل = { (٢ ، ١) }

مثـ٣ـال : أوجد مجموعة حل المعادلة : س + ص = ٥ ، س – ص = ١

الحــــــــــل

لتمثيل المعادلة الأولى بيانياً بالخط المستقيم $ل_١$

نكون الجدول التالى : ص = ٥ – س

س	٠	١	٥
ص	٥	٤	٠

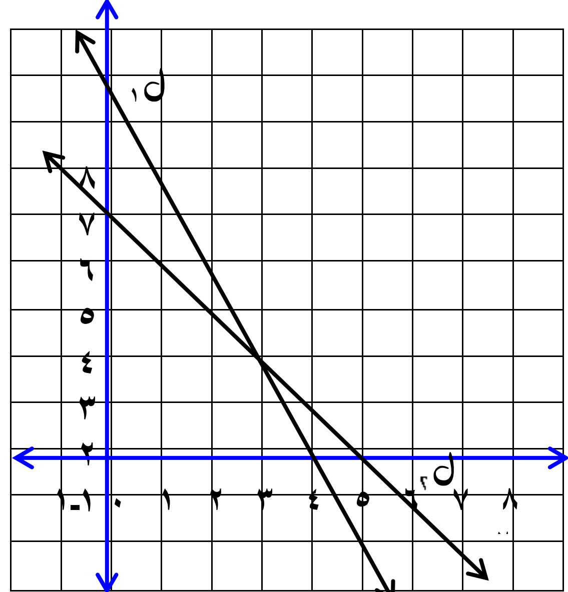
لتمثيل المعادلة الثانية بيانياً بالخط المستقيم $ل_٢$

نكون الجدول التالى : ص = س − ١

س	٠	١	٢
ص	− ١	٠	١

و نرسم كلاً من المستقيمين على نفس المستوى الإحداثى نوجد نقطة تقاطعهما فتكون هى مجموعة الحل ∴ مجموعة الحل = { (٣، ٢) }

مثــ٤ــال : أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢س + ص = ١٠ ، س + ص = ٧



الحـــــــــــل

لتمثيل المعادلة الأولى بيانياً بالخط المستقيم ل١

نكون الجدول التالى : ص = ١٠ − ٢ س

س	٥	٤	٣
ص	٠	٢	٤

لتمثيل المعادلة الثانية بيانياً بالخط المستقيم ل٢

نكون الجدول التالى : ص = ٧ − س

س	٥	٤	٢
ص	٢	٣	٥

و نرسم كلاً من المستقيمين على نفس المستوى الإحداثى نوجد نقطة تقاطعهما فتكون هى مجموعة الحل ∴ مجموعة الحل = { (٣ ، ٤) }

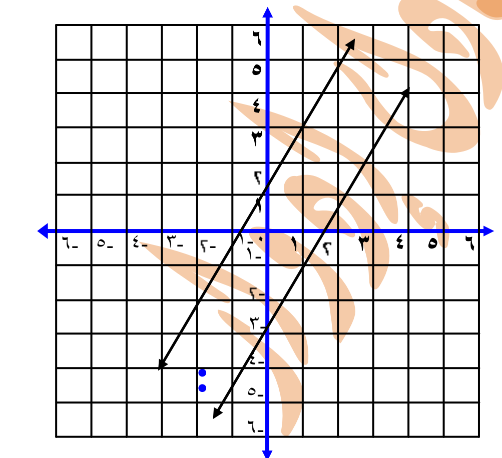
حالات خاصة :

١ − المستقيمان متوازيان :

مجموعة الحل = ∅

تساوى أو تناسب معاملى المتغيرين فى المعادلتين

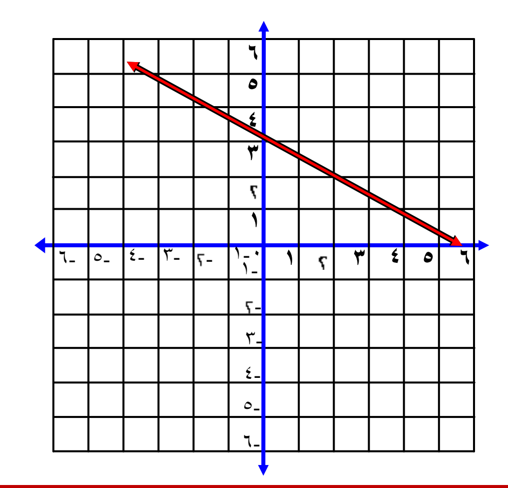
ميلا المستقيمان متساويان



مثال لذلك: ص = ٢ س − ٣ ، ٢ ص = ٤ س + ٢

٢ـ المستقيمان منطبقان :

مجموعة الحل = عدد غير منته من الحلول
تساوى أو تناسب معاملى المتغيرين فى المعادلتين
و كذا تساوى الحد المطلق فى كلا المعادلتين



ثانيا : حل معادلات الدرجة الأولى فى متغيرين

مثــــال : س + ٢ ص = ٣ ، ٢ س + ٤ س = ٦

توجد طريقتان هما :

١ ـ طريقة التعويض : و فيها نستخدم إحدى المعادلتين لإيجاد أحد المتغيرين بدلالة الآخر ثم نعوض عنه فى المعادلة الثانية فتحصل على معادلة فى متغير واحد و بحلها نحصل على قيمة هذا المتغير ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الآخر

٢ ـ طريقة الحذف : و فيها نجعل معاملى أحد المتغيرين فى المعادلتين كل منهما معكوساً جمعياً للآخر و بإجراء عملية جمع المعادلتين نحذف هذا المتغير ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الآخر

مثـ١ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين :

٢ س + ص = ٥ (١) ، س ـ ص = ١ (٢)

الحــــــــل

أولاً : (طريقة التعويض)

من المعادلة (١) ص = ٥ ـ ٢ س بالتعويض فى المعادلة (٢)

∴ س ـ (٥ ـ ٢ س) = ١ ∴ س ـ ٥ + ٢ س = ١

∴٣ س ـ ٥ = ١ ∴ ٣ س = ٦ ∴ س = ٢

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ ٢ × ٢ + ص = ١ ∴مجموعة الحل = { (٢ ، ١) }

ثانياً : (طريقة الحذف)

" واضح أن معاملى ص فى المعادلتين كل منهما معكوساً جمعياً للآخر "

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

ينتج : ٢ س + ص = ٥

س – ص = ١

٣ س = ٦ ∴ س = ٢

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ ٢ × ٢ + ص = ١

∴ مجموعة الحل = { (٢ ، ١) }

مثـــ٢ـــال: أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً س + ٢ = ٧ , س + ص = ٨

الحـــــــــل

المعادلة الأولى س + ٢ = ٧ ⟸ س = ٧ـ ٢ = ٥ بالتعويض فى م٢ عن قيمة س

س + ص = ٨ ⟸ ص = ٨ ـ ٥= ٣ ∴ م.ح = (٥ ، ٣)

مثـــ٣ـــال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين ٢س + ص = ١١ ، س – ص = ١

الحـــــــــل

نقوم بحل المعادلتين معاً عن طريق الحذف أو التعويض

٢س + ص = ١١

س – ص = ١ بالجمع

٣ س = ١٢ ∴ س = ٤

بالتعويض فى المعادلة الاولى ٢(٤) + ص = ١١

ص = ١١ ـ ٨ = ٣ ∴ م . ح = { (٤ ، ٣) }

مثـــ٤ـــال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين ٢س + ص = ٧ ، س +٣ ص = ٦

الحـــــــــل

نقوم بحل المعادلتين معاً عن طريق الحذف أو التعويض بضرب المعادلة الاولى فى ٣

٦س +٣ ص = ٢١

س + ٣ ص = ٦ بالطرح

٥ س = ١٥ ∴ س = ٣

بالتعويض فى المعادلة الاولى ٢(٣) + ص = ٧

ص = ٧ ـ ٦ = ١ ∴ م . ح = { (٣ ، ١) }

مثـ٥ـال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين ٢س + ص = ١٠ ، س + ص = ٧

الحـــــــــل

نقوم بحل المعادلتين معاً عن طريق الحذف أو التعويض

٢س + ص = ١٠

س + ص = ٧ بالطرح

∴ س = ٣

بالتعويض فى المعادلة الثانية ٣ + ص = ٧

ص = ٧ ـ ٣ = ٤ ∴ م . ح = { (٣ ، ٤) }

مثـ٦ـال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين س + ص = ٥ ، س – ص = ١

الحـــــــــل

نقوم بحل المعادلتين معاً عن طريق الحذف أو التعويض

س + ص = ٥

س – ص = ١ بالجمع

٢ س = ٦ ∴ س = ٣

بالتعويض فى المعادلة الاولى ٣ + ص = ٥

ص = ٥ ـ ٣ = ٢ ∴ م . ح = { (٣ ، ٢) }

مثـ٧ـال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين ٢ س + ص = ٥ ، ٤س – ٢ص = ١

الحـــــــــل

بضرب المعادلة الأولى × ٢

٤ س + ٢ ص = ١٠

٤س ـ ٢ص = ١

بالجمع ٠ ≠ ١١

المستقيمان متوازيان ∴ م . ح = ∅ عدد الحلول = صفر

مثـ٨ـال : أوجد جبريا مجموعة الحل للمعادلتين ٢ س + ص = ٥ ، ٤س + ٢ص = ١٠

الحـــــــــل

بضرب المعادلة الأولى × ـ٢

ـ٤ س ـ ٢ ص = ـ ١٠

٤س ـ ٢ص = ١٠

بالجمع ٠ = ٠

المستقيمان منطبقان ∴ م.ح = ح × ح عدد الحلول = لانهائى

مثـــال ٩ : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين :

٤ س + ٣ ص = ٦ (١) ، س ـ ٢ ص = ٧ (٢)

الحـــــل

بضرب طرفى المعادلة (٢) × ـ ٤ فتكون على الصورة :

ـ ٤ س + ٨ ص = ـ ٢٨

، المعادلة (١) هى : ٤ س + ٣ ص = ٦ بالجمع

١١ ص = ـ ٢٢ ∴ ص = ـ ٢

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ ٤ س + ٣ × ـ ٢ = ٦

∴ ٤ س = ١٢ ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = { (٣ ، ـ ٢) }

حل آخـــــر

بضرب طرفى المعادلة (١) × ٢ فتكون على الصورة : ٨ س + ٦ ص = ١٢

، بضرب طرفى المعادلة (٢) × ٣ فتكون على الصورة : ٣ س ـ ٦ ص = ٢١

بالجمع ١١ س = ٣٣ ∴ س = ٣

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ ١٢ + ٣ ص = ٦

∴ ٣ ص = ـ ٦ ∴ ص = ـ ٢

∴ مجموعة الحل = { (٣ ، ـ ٢) }

ملاحظة : يمكن التحقق من الحل و ذلك بالتعويض عن قيمة كل المتغيرين فى المعادلتين

كالتالى : نضع س = ٣ ، ص = ـ ٢

فى المعادلة (١) :

الطرف الأيمن = ٤ × ٣ + ٣ × ـ ٢ = ١٢ ـ ٦ = ٦ = الطرف الأيسر

فى المعادلة (٢) : الطرف الأيمن = ٣ ـ ٢ × ـ ٢ = ٧ = الطرف الأيسر

∴ (٣ ، ـ ٢) يحقق كلا المعادلتين

مسائل لفظية تؤول إلى معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين :

فى هذه المسائل يجب قراءة المسألة جيداً و تحديد المتغيرين (المجهولين)
و فرضهما " س ، ص مثلاً " و إستخدام معطيات المسألة لتكوين المعادلتين
ثم حلهما معاً كما سبق

مثـــ١٠ــال : مستطيل طوله يزيد عن ضعف عرضه بمقدار ٥ سم ، و محيطه ٣٤ سم
أوجد مساحته

الحـــــــل

نفرض أن الطول = س سم ، العرض = ص سم
∴ س – ٢ ص = ٥ (١) ، (س + ص) × ٢ = ٣٤
أى أن : ٢س + ٢ ص = ٣٤ (٢)
بجمع (١) ، (٢) ينتج : ٣ س = ٣٩ ∴ س = ١٣
بالتعويض فى (١) ينتج : ١٣ – ٢ ص = ٥ ∴ ص = ٤
∴ الطول = ١٣ سم ، العرض = ٤ سم
∴ مساحة المستطيل = ١٣ × ٤ = ٥٢ سم٢

مثـــ١١ــال: زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠°
أوجد قياس كل منهما

الحـــــــل

نفرض قياس الزاويتين س , ص
س + ص = ٩٠°
س ـ ص = ٥٠°
بجمع المعادلتين ٢ س = ١٤٠° ⟸ س = ٧٠°
بالتعويض فى م١ عن قيمة س ∴ ٧٠° + ص = ٩٠°
ص = ٩٠°ـ٧٠° = ٢٠° ∴ قياس الزاويتين هما ٧٠° ، ٢٠°

مثـــ١٢ــال: زاويتان متكاملتان ضعف قياس الكبرى يساوى سبعة أمثال قياس الصغرى
أوجد قياس كل منهما

الحـــــــل

نفرض قياس الزاويتين س , ص

المعادلتين س + ص = ١٨٠° , ٢س = ٧ ص ∴ ٢ س - ٧ ص = ٠

٧س + ٧ص = ١٢٦٠° بضرب المعادلة الأولى × ٧

٢س - ٧ ص = ٠

بالجمع ٩ س = ١٢٦٠° (÷ ٩) ∴ س = ١٤٠°

بالتعويض فى م١ عن قيمة س ١٤٠° + ص = ١٨٠°

∴ ص = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠°

مثـــ١٣ــال: مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم
فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم أوجد مساحة المستطيل

الحــــــل

نفرض الطول = س , العرض = ص

س – ص = ٤ (١) ، محيط المستطيل = (س + ص) × ٢ = ٢٨ (÷ ٢)

س + ص = ١٤ (٢)

بالجمع ٢ س = ١٨ (÷ ٢) ∴ س = ٩ ∴ الطول = ٩ سم

بالتعويض فى (١) عن قيمة س ⇐ ٩ - ص = ٤ ∴ العرض = ٥ سم

- ص = ٤-٩ = - ٥ ⇐ ص = ٥

مساحة المستطيل = الطول × العرض= ٩ × ٥ = ٤٥ سم^2

تمـــــارين

(١) أكمل ما يلى :

[١] المستقيمان ص = ٣ ، س = ١ متقاطعان فى النقطة ....

[٢] مجموعة الحل للمعادلتين س = ١ ، س + ص = ٢ هى ....

[٣] مجموعة حل المعادلتين س – ص = ٣ ، س + ص = ٥ هى ....

[٤] مجموعة حل المعادلتين س – ص = ٤ ، ٣ س + ٤ ص = ٥
هى { (٣ ، ....) }

[٥] عدد حلول المعادلتين س – ٢ ص = ٥ ، ٣ س – ٢ ص = ٧ هو ....

[٦] عدد حلول المعادلتين س + ٢ ص = ٢ ، س +٢ ص = ٣ هو ....

[٧] إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين س + ٤ ص = ٣ ،
س + ل ص = ٩ متوازيان فإن : ل = ...

[٨] إذا كان للمعادلتين س + ٤ ص = ٣ ، ٣ س + ك ص = ٩
عدد غير منته من الحلول فإن : ك = ...

[٩] إذا كان للمعادلتين س + ٢ ص = ١ ، ٢ س + ك ص = ٢ حل وحيد
فإن : ك لا يمكن أن = ...

(٢) إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١] مجموعة حل المعادلتين : س = ٣ ، ص = ٥ هى ....
(أ) { (٣ ، ٥) } (ب) { (٥ ، ٣) } (جـ) ع (د) ∅

[٢] نقط تقاطع المستقيمين ص = ٥ ، س + ص = ٦ هى ....
(أ) (٢ ، ٦) (ب) (٢ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٢) (د) (٦ ، ٢)

[٣] إذا كان مجموع عمرى أب وأبنه الآن ٤٥ سنه فإن مجموع عمريهما بعد ٥سنوات
(أ) ٣٥سنة (ب) ٤٠ سنة (جـ) ٥٠ سنة (د) ٥٥ سنة

[٤] مجموعة حل المعادلتين س ـ ٢ص = ١ ، ٣س + ص = ١٠ هى ....
(أ) { (٥ ، ٢) } (ب) { (٢ ، ٤) } (جـ) { (١ ، ٣) } (د) { (٣ ، ١) }

[٥] عدد حلول المعادلتين س + ص = ٢ ، ص + س = ٥ هو ....
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لانهائى

[٦] إذا كانت : س عددًا سالبًا فإن أكبر الأعداد التالية هو ....
(أ) ٥ س (ب) ٥ + س (جـ) ٥ ـ س (د) ٥ ÷ س

[٧] إذا كان للمعالتين س + ٤ص = ٧ ، ٣س + ك ص = ٢١ عدد لانهائى من الحلول
فإن ك = ... (أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٢١

[٨] عدد حلول المعادلتين س + ص =٧ ، س ـ ص =٧ معًا هو ....
(أ) صفر (ب) واحد (جـ) أثنين (د) عدد لانهائى

[٩] إذا كان المستقيمان س + ٣ص = ٤ ، س + ك ص =٧ متوازيان فإن ك = ...
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

(٣) أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات التالية جبرياً و بيانياً :

[١] س – ص = ٣ ، س + ص = ٧

[٢] س + ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٨

[٣] ٣ س + ص = ٦ ، ص = ٧ – ٣ س

[٤] س + ص = ٢ ، ٢ س – ص + ٨ = ٠

[٥] ٣ س + ٤ ص = ٧ ، ٢ س + ص = ٣

[٦] س = ص ، س + ٢ ص = ٦

(٤) إذا كان المستقيمان : ا س + ب ص = ٣ ، ١٢ س – ٣ ب ص = ١٦
يتقاطعان فى النقطة (– ١ ، ٢) أوجد قيمة كل من ا ، ب

(٥) مثل بيانياً كل من المستقيمين الممثلين للمعادلتين:
س – ص + ٢ = ٠ ، ٢ س + ٣ ص = ٦
ثم أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين هذين المستقيمين و محور السينات

(٦) إذا كان عدد البنات فى إحدى المدارس يزيد عن عدد البنين بمقدار ٥٠ ، و كان ثلاثة أمثال عدد البنات يقل عن ضعف عدد البنين بمقدار ٥٠ أوجد عدد كل من البنين و البنات

(٧) عدد مكون من رقمين مجموعهما ٩ ، و إذا تغير وضعا الرقمين كان العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلى بمقدار ٢٧ فما العدد الأصلى

(٨) مجموع عمرى رجل و أبنه الآن ٥٠ سنة و بعد ٥ سنوات يكون عمر الرجل مساوياً ثلاثة أمثال عمر أبنه أوجد عملا كل منهما الآن

(٩) مستطيل طوله أربعة أمثال عرضه و محيطه ٣٠ سم أوجد بعداه

(١٠) فى الحفلة السنوية لمدرسة تم بيع ٢٩٢ تذكرة و كان ثمن بيع التذكرة للطالب جنيها واحداً وللمرافق ٣ جنيهات فإذا كانت التذاكر المباعة ٤٧٠ تذكرة أوجد عدد التذاكر المبيعة من كل نوع

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيا و جبريا

تمهيد :

[١] سبق أن مثلنا الدالة التربيعية :

د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ ، أ ، ب ، حـ $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

[٢] المعادلة المناظرة لها هى : د (س) = ٠ أى : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

[٣] سبق حل هذه المعادلة بالتحليل

مثـال ١ : أوجد مجموعة حل المعادلة : س^{٢} ـ ٥ س + ٤ = ٠ جبرياً

الحـــــــــل

بتحليل الطرف الأيمن للمعادلة ينتج :

(س – ٤) (س – ١) = ٠

∴ س = ٤ أو س = ١

∴ مجموعة الحل = { ٤ ، ١ }

أولاً : الحل البيانى :

لحل المعادلة : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ بيانياً نتبع التالى :

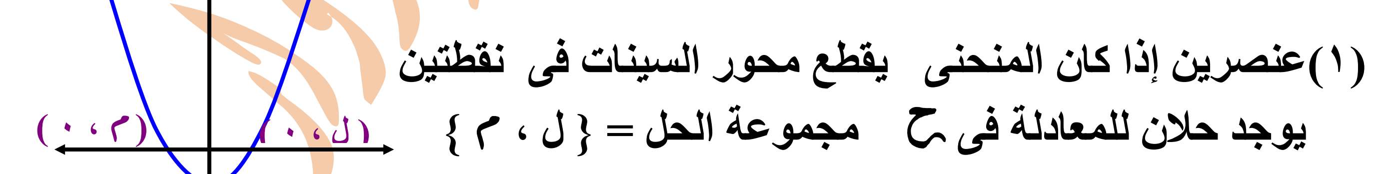
(١) نرسم منحنى الدالة د حيث

د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ ، أ ، ب ، حـ $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

(٢) نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات فتكون هى مجموعة الحل

ملاحظات :

تحتوى مجموعة الحل على :



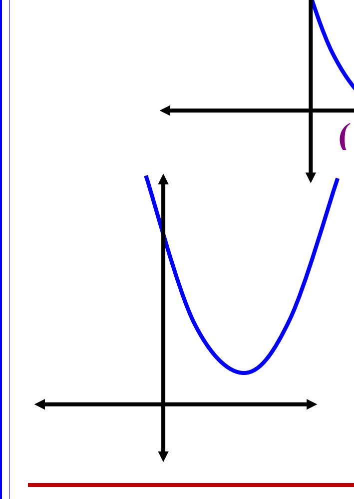
(١) عنصرين إذا كان المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين

يوجد حلان للمعادلة فى ح مجموعة الحل = { ل ، م }

(٢) عنصر واحد إذا كان المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة واحدة

مجموعة الحل = { ل } يوجد حل وحيد للمعادلة فى ح

(ل ، ٠)



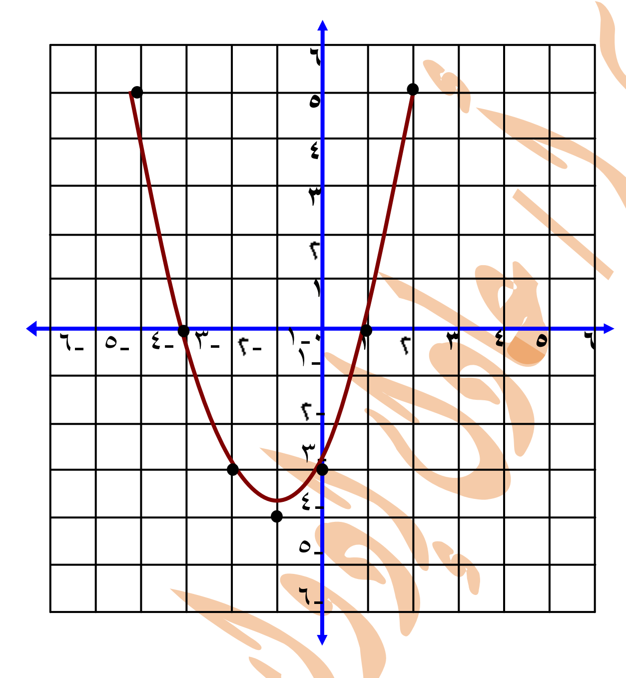
(٣) لا توجد عناصر إذا كان المنحنى لا يقطع محور السينات فى أى نقطة

لا يوجد حل للمعادلة فى ح مجموعة الحل = $\emptyset$

مثـ٢ـال : إرسم منحنى الدالة د (س) = س^{٢} + ٢ س – ٣ على الفترة [– ٤ ، ٢] و من الرسم أوجد جذرى المعادلة س^{٢} + ٢ س – ٣ = ٠

الحــــــل

نعين بعض الأزواج المرتبة التى تنتمى لبيان الدالة د و التى ينتمى مسقطها الأول س إلى [– ٤ ، ٢] كما سبق كالتالى



د (–٤) = (–٤)^{٢} + ٢ × (–٤) – ٣ = ٥

د (–٣) = (–٥)^{٢} + ٢ × (–٣) – ٣ = ٠

د (–٢) = (–٢)^{٢} + ٢ × (–٢) – ٣ = – ٣

د (–١) = (–١)^{٢} + ٢ × (–١) – ٣ = – ٤

د (٠) = (٠)^{٢} + ٢ × (٠) – ٣ = – ٣

د (١) = (١)^{٢} + ٢ × (١) – ٣ = ٠

د (٢) = (٢)^{٢} + ٢ × (٢) – ٣ = ٥

نكون الجدول التالى ثم نعين النقاط التى تمثل الأزواج المرتبة فى المستوى الديكارتى :

س	– ٤	– ٣	– ٢	– ١	٠	١	٢
ص = د (س)	٥	٠	– ٣	– ٤	– ٣	٠	٥

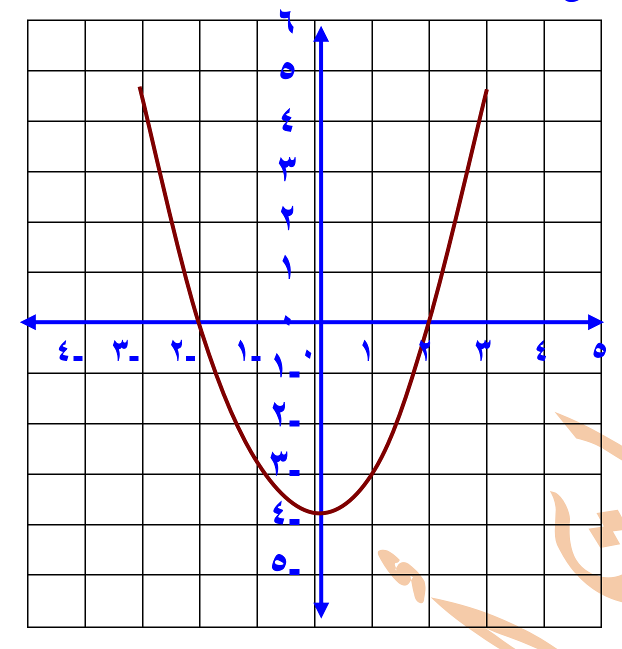
نمثل هذه الأزواج المرتبة بنقط على المستوى الإحداثى و نصل بينها بخط منحنى فيكون التمثيل البيانى للدالة من الرسم نجد أن منحنى الدالة يقطع محور السينات فى النقطتين (– ٣ ، ٠) ، (١ ، ٠)

يسمى العددان – ٣ ، ١ جذرى المعادلة $س^٢ + ٢ س – ٣ = ٠$

و تكون مجموعة الحل للمعادلة $س^٢ + ٢ س – ٣ = ٠$ هى { – ٣ ، ١ }

مثــ٣ــال : عين جذرى المعادلة $س^٢ – ٤ = ٠$ بيانيا

الحــــــــل



س	$س^٢$	-٤	د(س)	النقطة
-٣	٩	-٤	٥	(-٣، ٥)
-٢	٤	-٤	٠	(-٢ ، ٠)
-١	١	-٤	-٣	(-١ ، -٣)
٠	٠	-٤	-٤	(٠، -٤)
١	١	-٤	-٣	(١ ،-٣)
٢	٤	-٤	٠	(٢، ٠)
٣	٩	-٤	٥	(٣ ، ٥)

نكون الجدول التالى ثم نعين النقاط التى تمثل الأزواج المرتبة فى المستوى الديكارتى :

س	– ٣	– ٢	– ١	٠	١	٢	٣
ص = د (س))	٥	٠	– ٣	– ٤	– ٣	٠	٥

نمثل هذه الأزواج المرتبة بنقط على المستوى الإحداثى و نصل بينها بخط منحنى

فيكون التمثيل البيانى للدالة من الرسم نجد أن منحنى الدالة يقطع محور السينات فى

النقطتين (– ٢ ، ٠) ، (٢ ، ٠)

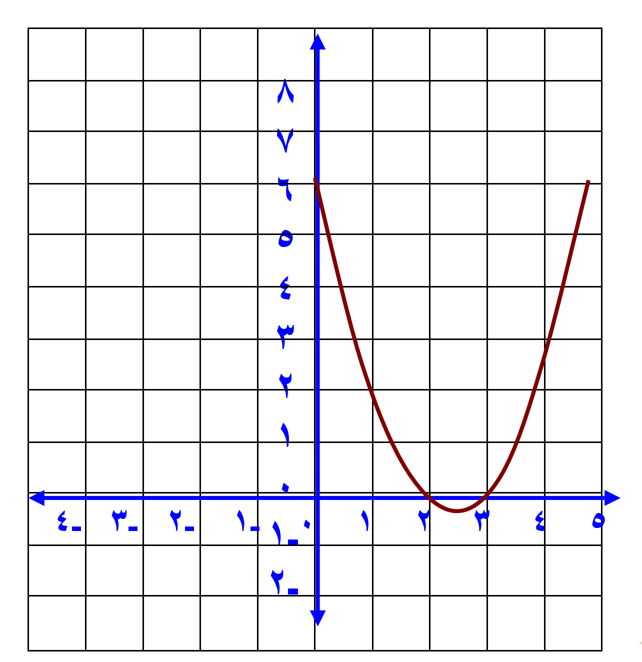
يسمى العددان – ٢ ، ٢ جذرى المعادلة $س^٢ – ٤ = ٠$

و تكون مجموعة الحل للمعادلة $س^٢ + ٢ س – ٣ = ٠$ هى { – ٢ ، ٢ }

مثــ٤ــال : أوجد بيانيا مجموعة الحل للمعادلة س^{٢} ـ ٥س + ٦ = ٠

الحــــــــــــل

س	س^{٢}	ـ٥س	٦	د(س)	النقطة
٠	٠	٠	٦	٣	(٠ ، ٦)
١	١	ـ٥	٦	٠	(١، ٢)
٢	٤	ـ١٠	٦	٠	(٢، ٠)
٣	٩	ـ١٥	٦	٠	(٣، ٠)
٤	١٦	ـ٢٠	٦	٢	(٤، ٢)
٥	٢٥	ـ٢٥	٦	٦	(٥ ، ٦)

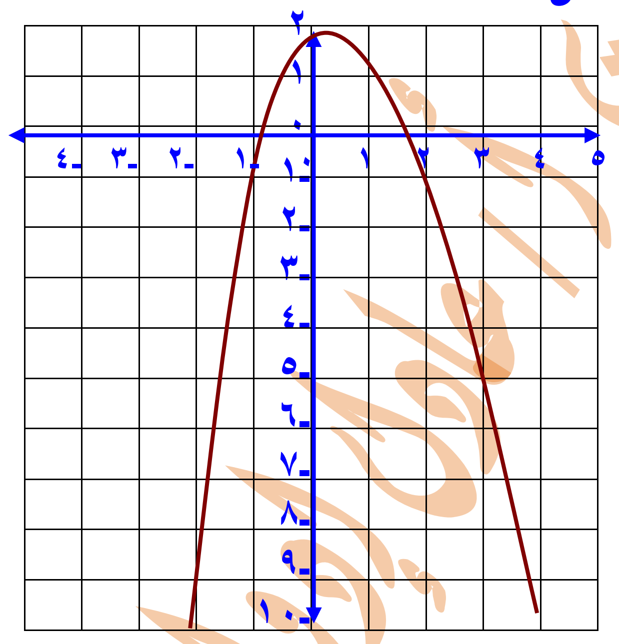


م . ح = { ١ ، ٣ }

مثــ٥ــال : أوجد بيانيا مجموعة الحل للمعادلة س ـ س^{٢} + ٢ = ٠

الحــــــــــــل

س	س	ـ س^{٢}	+٢	د(س)	النقطة
ـ٣	ـ٣	ـ٩	٢	ـ١٠	(ـ٣ ، ـ١٠)
ـ٢	ـ٢	ـ٤	٢	ـ٤	(ـ٢ ، ـ٤)
ـ١	ـ١	ـ١	٢	٠	(ـ١ ، ٠)
٠	٠	٠	٢	٢	(٠ ، ٢)
١	١	ـ١	٢	٢	(١ ، ٢)
٢	٢	ـ٤	٢	٠	(٢ ، ٠)
٣	٣	ـ٩	٢	ـ٤	(٣ ، ـ٤)
٤	٤	ـ١٦	٢	ـ١٠	(٤ ، ـ١٠)



م . ح = { ـ١ ، ٢ }

لاحظ أن مجموعة حل المعادلة هى نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

و إذا لم يقطع المنحنى محور السينات يكون ⟸ م.ح = ∅

مثـ٦ـال: مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم استنتج إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة و مجموعة حل المعادلة د(س) = صفر حيث د(س) = $(س-٢)^٢$ حيث س ∈ [-١ , ٥]

الحـــــــل

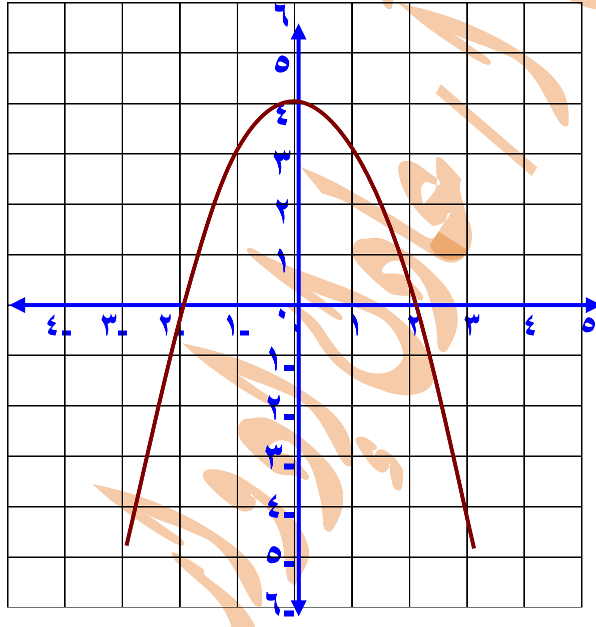
س	$(س - ٢)^٢$	د(س)	النقطة
-١	$(-١ -٢)^٢$	٩	(-١ ، ٩)
٠	$(٠ -٢)^٢$	٤	(٠ ، ٤)
١	$(١-٢)^٢$	١	(١ ، ١)
٢	$(٢-٢)^٢$	٠	(٢ ، ٠)
٣	$(٣-٢)^٢$	١	(٣ ، ١)
٤	$(٤-٢)^٢$	٤	(٤ ، ٤)
٥	$(٥-٢)^٢$	٩	(٥ ، ٩)

رأس المنحنى (٢ , ٠)

معادلة محور التماثل س = ٢ ، القيمة الصغرى عند ص = ٠ م.ح = {٢}

مثـ٧ـال : د(س) = ٤ - $س^٢$ حيث س ∈ [-٣ , ٣]

س	٤	$- س^٢$	د(س)	النقطة
-٣	٤	-٩	-٥	(-٣ ، -٥)
-٢	٤	-٤	صفر	(-٢ ، ٠)
-١	٤	-١	٣	(-١ ، ٣)
٠	٤	٠	٤	(٠ ، ٤)
١	٤	-١	٣	(١ ، ٣)
٢	٤	-٤	٠	(٢ ، ٠)
٣	٤	-٩	-٥	(٣ ، -٥)



رأس المنحنى (٠ , ٤)

معادلة محور التماثل س = ٠ ، القيمة العظمى عند ص = ٤ ، م.ح = { ٢ , -٢ }

ثانيا : الحل الجبرى بإستخدام القانون العام

تمهيد مجموعة حل المعادلة $س^٢ + ٤ س + ١ = ٠$ مستعيناً بفكرة إكمال المربع

الحـــــــل

∵ $س^٢ + ٤ س + ١ = ٠$

∴ $س^٢ + ٤ س = - ١$ بإضافة ٤ للطرفين " مربع نصف معامل س "

∴ $س^٢ + ٤ س + ٤ = - ١ + ٤$

∴ $(س + ٢)^٢ = ٣$

∴ $س + ٢ = \sqrt{٣}$ أو $س + ٢ = - \sqrt{٣}$

∴ $س = - ٢ + \sqrt{٣}$ أو $س = - ٢ - \sqrt{٣}$

القانون : مجموعة حل المعادلة $ا س^٢ + ب س + حـ = ٠$ مستعيناً بفكرة إكمال المربع

الحـــــــل

∵ $ا س^٢ + ب س + حـ = ٠$ بضرب الطرفين فى ٤ ا

∴ $٤ ا^٢ س^٢ + ٤ ا ب س + ٤ ا حـ = ٠$ بإكمال المربع " بإضافة $ب^٢$ للطرفين

∴ $٤ ا^٢ س^٢ + ٤ ا ب س + ب^٢ = ب^٢ - ٤ ا حـ$

∴ $٢ ا س + ب = \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ا حـ}$

∴ $٢ ا س = - ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ا حـ}$

∴ $س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ا حـ}}{٢ ا}$

- يمكن حل معادلة الدرجة الثانية $ا س^٢ + ب س + حـ = ٠$ ، ا ، ب ، حـ ∈ ح ، ا ≠ ٠ بإستخدام القانون العام :

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ا حـ}}{٢ ا}$$ حيث : ، ا ، ب ، حـ ∈ ح ، ا ≠ ٠

ا معامل $س^٢$ ، ب معامل س ، حـ الحد المطلق

مثـ١ـال : أوجد مجموعة حل المعادلة باستخدام القانون العام

س^{٢} = ٢ س +٢ اعتبر $\sqrt{٣}$ = ١,٧

الحـــــــــل

يجب ترتيب حدود المعادلة على الصورة العامة س^{٢} - ٢ س -٢ = ٠

ا = ١ ، ب = -٢ ، ج = -٢

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا حـ}}{٢ ا}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ × ١ × -٢}}{٢ × ١}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$

∴ س = ١ + $\sqrt{٣}$ = ٢,٧ ، س = ١ - $\sqrt{٣}$ = -٠,٧

∴ مجموعة الحل = { ٢,٧ ، -٠,٧ }

مثـ٢ـال: أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : ٥ س^{٢} + ٢ س - ٤ = ٠

مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحـــــــــل

∵ ٥ س^{٢} + ٢ س - ٤ = ٠

∴ ا = ٥ ، ب = ٢ ، حـ = -٤

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا حـ}}{٢ ا}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ × ٥ × -٤}}{٢ × ٥}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٨٤}}{١٠}$

∴ س = $\frac{٢ + \sqrt{٨٤}}{١٠}$ = ٠,٠٧١٦ ، س = $\frac{-٢ \sqrt{٨٤}}{١٠}$ = -١,١١٦

∴ مجموعة الحل = { ٠,٠٧١٦ ، -١,١١٦ }

مثـ٣ـال: أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : س^{٢} - ٢ س - ١ = ٠

مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحـــــــــل

س^{٢} - ٢ س - ١ = ٠ ⟸ ا = ١ ، ب = -٢ ، حـ = -١

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا حـ}}{٢ ا}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ × ١ × -١}}{٢}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٨}}{٢}$

∴ $\text{س} = \frac{٢ + \sqrt{٨}}{٢} = ٢,٤١٤٢$ ، $\text{س} = \frac{٢ - \sqrt{٨}}{٢} = -٠,٤١٤٢$

∴ مجموعة الحل = { ٢,٤ ، −٠,٤ }

مثـ٤ـال: أوجد مجموعة حل المعادلة باستخدام القانون العام $\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٢ = ٠$

الحـــــل

ا = ١ , ب = -٤ , ج = ٢

∴ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{ا}\,\text{حـ}}}{٢\,\text{ا}} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{٨}}{٢}$

∴ $\text{س} = ٢ + \sqrt{٢} = ٣,٤١٤٢$ ، $\text{س} = ٢ - \sqrt{٢} = ٠,٥٨٥٧$

∴ مجموعة الحل = { ٣,٤ ، ٠,٦ }

مثـ٥ـال: أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} - ٢ = ٠$
مقرباً الجواب لرقمين عشريين

الحـــــل

∵ $\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} - ٢ = ٠$

∴ ا = ١ ، ب = −٤ ، حـ = −٢

∴ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{ا}\,\text{حـ}}}{٢\,\text{ا}} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times -٢}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$

∴ $\text{س} = ٢ + \sqrt{٦} = ٤.٤٤٩٤$ ، $\text{س} = ٢ - \sqrt{٦} = -٠.٤٤٩٤$

∴ مجموعة الحل = { ٤,٤٥ ، −٠,٤٥ }

مثـ٦ـال: أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٤ = ٠$
مقرباً الجواب لرقمين عشريين

الحـــــل

∵ $\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٤ = ٠$

∴ ؏ = ١ ، ب = ـ٢ ، حـ = ـ ٤

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ ؏ حـ}}{٢ ؏}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١}$ = $\frac{٤ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$

∴ س = ١ + $\sqrt{٥}$ = ٣,٢٣٦٠ ، س = ١ ـ $\sqrt{٥}$ = ـ ١,٢٣٦٠

∴ مجموعة الحل = { ٣,٢٣ ، ـ ١,٢٣ }

مثــ٧ــال: أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٣س^{٢} ـ ٥ س ـ ١ = ٠
مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحــــــل

∵ ٣ س^{٢} ـ ٥ س ـ ١ = ٠

∴ ؏ = ٣ ، ب = ـ٥ ، حـ = ـ ١

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ ؏ حـ}}{٢ ؏}$ = $\frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ١ \times -١}}{٢ \times ٣}$ = $\frac{٥ \pm \sqrt{٣٧}}{٦}$

∴ س = $\frac{٥ + \sqrt{٣٧}}{٦}$ = ١,٨٤٧١ ، س = $\frac{٥ - \sqrt{٣٧}}{٦}$ = ـ ٠,١٨٠٤

∴ مجموعة الحل = { ١,٨ ، ـ ٠,٢ }

مثــ٨ــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة س^{٢} = ٢ (س + ٣)
مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحــــــل

س^{٢} = ٢ س + ٦ س^{٢} ـ ٢ س - ٦ = ٠

؏ = ١ ب = ـ٢ جـ = -٦

ب^{٢} ـ ٤ ؏ جـ = (ـ٢)^{٢} ـ ٤ × ١ × -٦ = ٤+٢٤ = ٢٨

∴ ؏ = ١ ، ب = ـ ٤ ، حـ = ـ٦

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ ؏ حـ}}{٢ ؏}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times -٦}}{٢ \times ٣}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٢٨}}{٢}$

∴ س = ١ + $\sqrt{٧}$ = ٣,٦٤٥٧ ، س = ١ − $\sqrt{٧}$ = −١,٦٤٥٧

∴ مجموعة الحل = { ٣,٦ ، −١,٦ }

مثـ٩ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : (س − ٢)^{٢} = ٦
مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحـــــل

س^{٢} − ٤ س + ٤ = ٦ ⟸ س^{٢} − ٤ س − ٢ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = −٢

∴ س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\ \text{أ}\ \text{جـ}}}{٢\ \text{أ}} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times -٢}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$

∴ س = ٢ + $\sqrt{٦}$ = ٤,٤٤٩٤ ، س = ٢ − $\sqrt{٦}$ = −٠,٤٤٩٤

∴ مجموعة الحل = { ٤,٤٥ ، −٠,٤٥ }

مثـ١٠ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة س (س − ٣) = ٩
مقرباً الجواب لرقم عشرى واحد

الحـــــل

س^{٢} − ٣ س = ٩   س^{٢} − ٣ س − ٩ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = −٩

∴ س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\ \text{أ}\ \text{جـ}}}{٢\ \text{أ}} = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times -٩}}{٢ \times ١} = \frac{٣ \pm \sqrt{٤٥}}{٢}$

∴ س = $\frac{٣ + \sqrt{٤٥}}{٢}$ = ٤.٨٥٤١ ، س = $\frac{٣ - \sqrt{٤٥}}{٢}$ = −١.٨٥٤١

∴ مجموعة الحل = { ٤.٩ ، −١.٩ }

مثـ١٠ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة $س = \frac{١}{س} + ٣$

الحـــــل

بالضرب × س س^٢ = ١ س + ٣   س^٢ ـ س + ٣ = ٠

∴ م = ١ ، ب = ـ١ ، حـ = ٣

$∴ س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ م حـ}}{٢ م} = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ × ١ × ٣}}{٢ × ١} = \frac{-١ \pm \sqrt{-١١}}{٢}$

غير معرفة لأن قيمة ب^٢ ــ ٤ م جـ > صفر (عدد سالب)

∴ م.ح = ∅

مثـ١١ـال : رأى ثعبان على الأرض صقراً على إرتفاع ١٦٠ متراً منه و هو ينطلق إليه بسرعة ٢٤ متراً / الدقيقة لكى ينقض عليه ، فإذا كان الصقر ينطلق رأسياً لأسفل حسب العلاقة : ف = ع. ن + ٤,٩ ن^٢ حيث ف المسافة بالمتر، ع. سرعة إنطلاق الصقر بالمتر / دقيقة ، ن الزمن بالدقائق أوجد الزمن الذى يأخذه الثعبان لكى يتمكن من الهرب قبل أن يصل إليه الصقر

الحـــــل

ف = ع. ن + ٤,٩ ن^٢ ، ف = ١٦٠ ، ع. = ٢٤

∴ ١٦٠ = ٢٤ ن + ٤,٩ ن^٢ ∴ ٤,٩ ن^٢ + ٢٤ ن ـ ١٦٠ = ٠

∴ م = ٤,٩ ، ب = ٢٤ ، حـ = ـ١٦٠

$∴ س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ م حـ}}{٢ م} = \frac{٣ \pm \sqrt{٥٧٦ - ٤ × ٤,٩ × (-١٦٠)}}{٢ × ٤,٩}$

∴ ن = ٣,٨ أو ن = ـ ٨,٧ مرفوض

∴ الزمن الذى يأخذه الثعبان لكى يتمكن من الهرب قبل أن يصل إليه الصقر = ٣,٨ دقيقة

تمـــــــارين

(٢) إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١] إذا كان منحنى الدالة التربيعية لا يقطع محور السينات فإن عدد حلول المعادلة .....

ٲ صفر   ب ١   ج ٢   د عدد لانهائى

[٢] د (س) = ٲ س^{٢} + ٤ وكان د (١) = ٣ فإن ٲ = ...

ٲ ١   ب ١-   ج ٣   د $\sqrt{٣}$

[٣] إذا كان منحنى الدالة التربيعية يمس محور السينات فإن عدد حلول المعادلة .....

ٲ صفر   ب ١   ج ٢   د عدد لانهائى

[٤] منحنى الدالة التربيعية يقطع حور السينات فى (٢ ، ٠) ، (-١ ، ٠) فإن مجموعة حل المعادلة هى.......

ٲ (٢ ، -١)   ب (-٢ ، ١)   ج (١ ، -٢)   د (-١ ، ٢)

(٢) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية بإستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقمين عشريين

[١] س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠   [٢] ٢ س^{٢} + ٥ س – ٦ = ٠

[٣] ٥ س^{٢} – ٣ س = ١   [٤] – س^{٢} + ٢ س + ٢ = ٠

[٥] س (س + ٢) = ٦   [٦] س^{٢} = ٢ (س + ٦)

[٧] (س – ٢)^{٢} = ٦   [٨] س – $\frac{س}{٣}$ = ٣

[٩] ١ + $\frac{٢}{س}$ = $\frac{٥}{س}$ [١٠] $\frac{١}{س – ٣}$ = $\frac{س}{٢}$

(٣) إرسم الشكل البيانى للدالة د فى الفترة المعطاه ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد فى كل مما يلى :

[١] د (س) = س^{٢} + ٤ س + ٥   فى [– ٤ ، ٠]

[٢] د (س) = س^{٢} – ٥   فى [– ٤ ، ٤]

[٣] د (س) = ٣ س^{٢} – ٦ س – ١   فى [– ١ ، ٣]

[٤] د (س) = ٤ س – س^{٢} فى [– ١ ، ٥]

[٥] د (س) = س (س + ١) – ٦ فى [– ٤ ، ٣]

[٦] د (س) = ٢ س (س – ١) – (س + ١)^{٢} + ٥ فى [٠ ، ٤]

(٤) إرسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = ٤ س – س^{٢} – ٤
فى [٠ ، ٤] و من الرسم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ،
ثم أوجد مجموعة حل المعادلة ٤ س – س^{٢} – ٤ = ٠

(٥) إرسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = ٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩
فى [– ٤ ، ١] و من الرسم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ،
ثم أوجد مجموعة حل المعادلة ٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩ = ٠

(٦) فى إحدى مسابقات رمى القرص كان مسار القرص بالنسبة لأحد اللاعبين يتبع
العلاقة التالية : ص = ٤,٩ س – ٠,٠٤٣ س^{٢} + ١٣ حيث س تمثل المسافة
الأفقية بالمتر ، ص إرتفاع القرص عن سطح الأرض ، أوجد المسافة الأفقية التى
يسقط عندها القرص بدءاً من نقطة القذف لأقرب جزء من مائة

(٧) إذا كانت مساحة أرض زراعية تعطى بالعلاقة : ص = ٢ س^{٢} + ٧ س – ٦
أوجد قيمة س بالمتر التى تجعل ص = ٢٤٠ م^{٢}

ء ع ﻫ ز و ب حـ ا

(٨) فى الشكل المقابل : ا ب حـ ء مستطيل فيه ا ب = ١٠ سم
، ب حـ = ١٤ سم فإذا كان ا ﻫ = ب و = حـ ز = ء ع = س سم
أثبت أن : مساحة الشكل ﻫ و ز ع = ٢ س^{٢} – ٢٤ س + ١٤٠ و أوجد بيانياً
مجموعة حل المعادلة ص = ٢ س^{٢} – ٢٤ س + ١٤٠ عندما ص = ٧٦ سم^{٢}

مراجعة علي التحليل

١) التحليل بإخراج (ع . م . أ)

١٢ س^{٣} – ٤ س = ٤س (٣ س^{٢} – ١)

٢) تحليل فرق بين مربعين

٤ س^{٢} – ٩ = (٢ س – ٣) (٢ س + ٣)

٣) تحليل الفرق بين مكعبين :

س^{٣} – ٨ = (س – ٢) (س^{٢} + ٢ س + ٤)

٤) تحليل مجموع مكعبين :

س^{٣} + ١٢٥ = (س + ٥) (س^{٢} – ٥ س + ٢٥)

٥) تحليل المقدار الجبري الثلاثي البسيط " معامل س^{٢} = ١ "

س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)

س^{٢} – ٥ س + ٦ = (س – ٣)(س – ٢)

س^{٢} + ٥ س – ٦ = (س – ١)(س + ٦)

س^{٢} – ٥ س – ٦ = (س – ٦)(س + ١)

٦) تحليل المقدار الثلاثي غير البسيط " معامل س^{٢} ≠ ١ "

٣ س^{٢} + ١١ س + ٦ = (س + ٣)(٣ س + ٢)

٣ س^{٢} – ١٩ س + ٦ = (٣ س – ١)(س – ٦)

٣ س^{٢} + ٧ س – ٦ = (س + ٣)(٣ س – ٢)

٣ س^{٢} – ١٧ س – ٦ = (س – ٦)(٣ س + ١)

٧) المقدار الثلاثى المربع الكامل :

س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س + ٣)^{٢}

٢٥ س^{٢} – ٤٠ س + ١٦ = (٥ س – ٤)^{٢}

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية

- حل المعادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية يعنى إيجاد الزوج المرتب أو الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية التى تمثل حلاً مشتركاً للمعادلتين معاً

*** خطوات الحل :**

(١) من معادلة الدرجة الأولى نوجد أحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر

(٢) نعوض من معادلة الدرجة الأولى فى معادلة الدرجة الثانية

(٣) نفك الأقواس مع تجميع الحدود المتشابهة ثم التحليل لنحصل على قيم المتغير الأول

(٤) نعوض فى معادلة الدرجة الأولي نحصل على قيم المتغير الأخر

* يعتمد الحل على طريقة التعويض كما يتضح من الأمثلة التالية :

مثـ١ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : س ــ ص = ٣ , س^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

الحـــــل

من المعادلة الأولى : س = ٣ + ص

وبالتعويض في المعادلة الثانية: (٣ + ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

∴ ٩ + ٦ ص + ص^{٢} + ص^{٢} = ٢٩ ∴ ٢ ص^{٢} + ٦ ص ــ ٢٠ = ٠

، بالقسمة على ٢ : ص^{٢} + ٣ ص ــ ١٠ = ٠

، بالتحليل : (ص + ٥)(ص ــ ٢) = ٠

∴ ص = ــ ٥ ؛أ ص = ٢ وبالتعويض في المعادلة الأولى :

∴ س = ٣ ــ ٥ = ــ ٢ ؛ أ س = ٣ + ٢ = ٥

∴ مجموعة الحل = { (٥ ، ٢) , (ــ ٢ ، ــ ٥) }

مثـ٢ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س + ص = ٥ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٣

الحـــل

من المعادلة الاولى ص = ٥ ــ س و بالتعويض فى المعادلة الثانية

∴ س^{٢} + (٥ ــ س)^{٢} = ١٣

∴ س^{2} + ٢٥ – ١٠ س + س^{2} – ١٣ = ٠

∴ ٢س^{2} – ١٠ س + ١٢ = ٠

، بالقسمة على ٢ : س^{2} – ٥ س + ٦ = ٠

، بالتحليل : (س – ٢) (س – ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣ وبالتعويض في المعادلة الأولى :

∴ ص=٥ – ٢ = ٣ أ، ص = ٥ – ٣ = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢، ٣) ، (٣ ، ٢)}

مثـ٣ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س – ص = ٣ ، س^{2} + ص^{2} = ٢٩

الحـــــل

من المعادلة الاولى س = ٣ + ص وبالتعويض فى المعادلة الثانية

∴ (٣ + ص)^{2} + ص^{2} = ٢٩

∴ ٩+ ٦ ص + ص^{2} + ص^{2} – ٢٩ = ٠

∴ ٢ص^{2} + ٦ ص – ٢٠ = ٠

، بالقسمة على ٢ : ص^{2} + ٣ ص – ١٠ = ٠

، بالتحليل : (ص + ٥)(ص – ٢) = ٠

∴ ص = - ٥ أ، ص = ٢ وبالتعويض في المعادلة الأولى :

∴ س=٣+(-٥) = -٢ أ، س = ٣+٢= ٥

∴ مجموعة الحل = { (-٢ ، -٥) ، (٥ ، ٢) }

مثـ٤ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : س = ٥ – ص , س^{2} – ص^{2} = ٥٥

الحـــــل

بالتعويض من المعادلة الأولي في الثانية : (٥ – ص)^{2} – ص^{2} – ٥٥ = ٠

∴ ٢٥ – ١٠ ص + ص^{2} – ص^{2} – ٥٥ =٠

∴ – ١٠ ص – ٣٠ = ٠ ∴ ص + ٣ = ٠ ∴ ص = – ٣

∴ س = ٥ – (– ٣) = ٥ + ٣ = ٨

∴ مجموعة الحل = { (٨ , – ٣) }

مثــ٥ــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س + ص = ٧ ، س ص = ١٢

الحـــل

من المعادلة الأولى ص = ٧ ــ س

و بالتعويض فى المعادلة الثانية ∴ س (٧ ــ س) = ١٢

∴ ٧س ــ س٢ ــ ١٢ = ٠ ×ـ١

بالضرب فى (ــ ١) ∴ س٢ ــ ٧ س + ١٢ = (س ــ ٣) (س ــ ٤) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ٤

∴ ص = ٧ ــ ٣ = ٤ أ، ص = ٧ ــ ٤ = ٣

∴ مجموعة الحل = { (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) }

مثــ٦ــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س ــ ص = ٢ ، س ص = ١٥

الحـــل

من المعادلة الأولى ص = س ــ ٢

وبالتعويض فى المعادلة الثانية ∴ س (س ــ ٢) = ١٥

∴ س٢ ــ ٢ س ــ ١٥ = (س ــ ٥) (س + ٣) = ٠

∴ س = ٥ س = ـ٣

∴ ص = ٥ ــ ٢ = ٣ ص = ـ٣ ــ ٢ = ـ٥

∴ م ٠ ح = { (٥ ، ٣) ، (ـ٣ ، ـ٥) }

مثــ٧ــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : ص = ٢ س + ١ , ٤ س٢ + ص٢ = ١٣

الحـــل

وبالتعويض من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية :

٤ س٢ + (٢ س + ١)٢ ــ ١٣ = ٠

٤ س٢ + ٤ س٢ + ٤ س + ١ ــ ١٣ = ٠

٨ س٢ + ٤ س ــ ١٢ = ٠ (بالقسمة علي ٤)

∴ ٢ س٢ + س ــ ٣ = ٠

بالتحليل : (٢ س + ٣) (س ــ ١) = ٠

إما ٢ س + ٣ = ٠ ومنها : س = ــ $\frac{٣}{٢}$ أو، س ــ ١ = ٠

ومنها : س = ١ بالتعويض في المعادلة الأولى :

∴ ص = ٢ × − $\frac{٣}{٢}$ + ١ = − ٢ أ؛ ص = ٢ × ١ + ١ = ٣

∴ مجموعة الحل = { (− $\frac{٣}{٢}$, − ٢) ، (١ ، ٣) }

مثـ٨ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س+ ص=٧ ، س^{٢} + س ص = ١٤

الحــــــــل

بالتعويض من المعادلة الاولى فى الثانية ص = ٧ − س

∴ س^{٢} + س (٧ − س) = ١٤

∴ س^{٢} + ٧ س − س^{٢} = ٧ س = ١٤

∴ س = ٢ ومنها ص = ٧ − ٢ = ٥

∴ م ٠ ح = { (٢ ، ٥) }

مثـ٩ـال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين ص = ٢ س ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠

الحــــــــل

بالتعويض من المعادلة الاولى فى الثانية س^{٢} + (٢ س)^{٢} = ٢٠

س^{٢} + ٤ س^{٢} = ٢٠

∴ ٥ س^{٢} = ٢٠ ∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

∴ س = ٢ أ، س = −٢

∴ ص=٢(٢) = ٤ أ، ص =٢(−٢) = −٤

∴ م ٠ ح = {(٢ ، ٤) ، (−٢ ، −٤) }

مثـ١٠ـال : مجموعة الحل للمعادلتين س + ص= ٥ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ١٩

الحــــــــل

من المعادلة الاولى ص = ٥ − س بالتعويض فى المعادلة الثانية

∴ س^{٢} + س (٥ − س) + (٥ − س)^{٢} = ١٩

∴ س^{٢} + ٥ س − س^{٢} + ٢٥ − ١٠ س + س^{٢} − ١٩ = ٠

∴ س^{٢} − ٥ س + ٦ = (س − ٢)(س − ٣) =٠

∴ س = ٢ س = ٣

∴ ص = ٥ − ٢ = ٣ ص = ٥ − ٣ = ٢

∴ م ٠ ح = { (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) }

مثـال ١١ : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين س = ٢ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

الحـــــل

بالتعويض عن س = ٢ فى المعادلة الثانية (٢)^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

∴ ٤ + ص^{٢} = ٢٩

∴ ص^{٢} = ٢٩ ـ ٤ = ٢٥ ∴ ص = $\sqrt{٢٥}$ = ± ٥

∴ م . ح = { (٢ ، ٥) ، (٢ ، -٥) }

مثـال ١٢ : مجموعة الحل للمعادلتين س=٠ ، ص^{٢} + س^{٢} ـ ٣س ـ ٦ ص + ٨ = ٠

الحـــــل

بالتعويض من الاولى فى الثانية ص^{٢} + (٠)^{٢} ـ ٣ (٠) ـ ٦ ص + ٨ = ٠

∴ ص^{٢} ـ ٦ ص + ٨ =(ص ـ ٢)(ص ـ ٤) = ٠

∴ ص = ٢ أ، ص = ٤ ∴ م . ح = { (٠ ، ٢) ، (٠ ، ٤) }

تطبيقات علي حل معادلتين في متغيرين

خطوات حل التطبيقات :

١ ـ نفرض أن احد المجهولين س و الأخر ص

٢ ـ نكون المعادلتين في س , ص من معطيات المسألة

٣ ـ نحل المعادلتين كالسابق لنحصل علي س , ص

مثـال١ : عددان مجموعهما ٨ وحاصل ضربهما ١٥ أوجد العددين

الحـــــل

نفرض أن العددين هما : س , ص

∴ س + ص = ٨ , س ص = ١٥

ومن المعادلة الأولي : ص = ٨ ـ س

وبالتعويض في المعادلة الثانية :

∴ س (٨ ـ س) =١٥

∴ ٨ س ـ س^{٢} ـ ١٥ =٠ بالضرب × ـ ١

فكرة أخرى :
بضرب المعادلة الأولى فى س
∴ س^{٢} + س ص = ٨ س
∴ س^{٢} + ١٥= ٨ س
∴ س^{٢} ـ ٨ س + ١٥= ٠
ثم يكمل الحل بنفس الخطوات

∴ س٢ – ٨ س + ١٥ = ٠

وبالتحليل ∴ (س – ٣)(س – ٥) = ٠

عندما س = ٣ فان : ص = ٥

، عندما س = ٥ فان ص = ٣ ∴ العددان هما ٥ , ٣

مثـ٢ـال : مستطيل محيطه = ٢٠سم ومساحته = ٢٤ أوجد بُعديه

الحـــــــل

نفرض أن طول المستطيل = س وعرضه = ص

∵ محيطه = ٢٠ ∴ ٢ (س + ص) = ٢٠

∴ س + ص = ١٠ ∴ ص = ١٠ – س (المعادلة الاولى)

∵ مساحة المستطيل = ٢٤ ∴ س ص = ٢٤ (المعادلة الثانية)

بالتعويض من الاولى فى الثانية ∴ س (١٠ – س) = ٢٤

١٠ س – س٢ – ٢٤ = ٠ ×-١

بالضرب × (-١) ∴ س٢ – ١٠ س + ٢٤ = (س – ٤)(س – ٦) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = ٦

وبالتعويض فى الاولى ∴ ص = ١٠ - ٤ = ٦ أ، ص = ١٠ - ٦ = ٤

∴أبعاد المستطيل ٤ ، ٦

مثـ٣ـال : عددين مجموعهما = ٦ ومجموع مربعيهما = ٢٠ أوجد هذان العددان

الحـــــــل

نفرض أن العددان هما س ، ص

∵ مجموعهما = ٦ ∴ س + ص = ٦ (١)

∵ مجموع مربعيهما = ٢٠ ∴ س٢ + ص٢ = ٢٠ (٢)

من المعادلة الأولى ∴ ص = ٦ – س

بالتعويض من الاولى فى الثانية س٢ + (٦ – س)٢ = ٢٠

س٢ + ٣٦ – ١٢س + س٢ – ٢٠ = ٢س٢ – ١٢ س + ١٦ = ٠ ÷٢

∴ س٢ – ٦ س + ٨ = (س – ٢) (س – ٤) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٤ وبالتعويض فى الاولى ص = ٦ – ٢ = ٤

أ، ص = ٦ – ٤ = ٢ ∴ العددان هما ٢ ، ٤

مثـ٤ـال : يزيد ثلاثة أمثال عمر هانى عن ضعف عمر سامى بمقدار ٢٤ ، وينقص مجموع مربعيهما عن ثلاثة أمثال حاصل ضرب عمريهما بمقدار ١٧٦ أوجد عمر كل منهما

الحـــــــــل

بفرض أن عمر هانى س سنة ، عمر سامى ص سنة

∴ ٣ س – ٢ ص = ٢٤ و منها : س = $\frac{٢٤ + ٢ ص}{٣}$

, ٣ س ص – ($س^{٢}$ + $ص^{٢}$) = ١٧٦

∴ ٣ ص ($\frac{٢٤ + ٢ ص}{٣}$) – $(\frac{٢٤ + ٢ ص}{٣})^{٢}$ – $ص^{٢}$ – ١٧٦ = ٠

بالفك و الضرب × ٩ و الإختصار ∴ $ص^{٢}$ + ٢٤ ص – ٤٣٢ = ٠

∴ (ص + ١٦) (ص – ١٢) = ٠

∴ ص = ١٢ ، س = ١٦

∴ عمر هانى = سنة ، عمر سامى = ١٢ سنة

مثـ٥ـال: مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم فإذا كان مساحة المستطيل ٢٨ $سم^{٢}$ أوجد محيط المستطيل

الحـــــــــل

نفرض الطول = س ، العرض = ص

س - ص = ٣ ⟸ س = ص + ٣ (١)

مساحة المستطيل = الطول × العرض = س × ص = ٢٨ (٢)

بالتعويض من (١) عن قيمة س فى (٢)

(ص + ٣) × ص = $ص^{٢}$ + ٣ ص = ٢٨

$ص^{٢}$ + ٣ ص - ٢٨ = (ص - ٤) (ص + ٧) = ٠

∴ ص - ٤ = ٠ ⟸ ص = ٤ من (١) ∴ س = ٤ +٣ = ٧

أ، ص + ٧ = ٠ ⟸ ص = - ٧ مرفوض

∴ الطول = ٧ سم , العرض = ٤ سم

محيط المستطيل =(الطول + العرض) ×٢ = (٧ + ٤) × ٢ = ٢٢ سم

مثـــ٦ـــال : مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعى القائمة يزيد عن الضلع الاخر بمقدار ٢ وطول وتره = ١٠ سم أوجد محيطه

الحـــــــــل

نفرض أن ضلعى القائمة س ، ص ∴ س – ص = ٢ ∴ ص = س – ٢ (١)

من نظرية فيثاغورث ∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠ (٢)

بالتعويض من المعادلة الاولى فى الثانية ∴ س^{٢} + (س – ٢)^{٢} = ١٠٠

∴ س^{٢} + س^{٢} – ٤ س +٤ – ١٠٠ = ٠

٢س^{٢} – ٤ س – ٩٦ = ٠ ÷ ٢

∴ س^{٢} – ٢ س – ٤٨ =(س – ٨)(س +٦) = ٠

∴ س = ٨ س = – ٦ (مرفوضة)

∴ ص = ٨ – ٢ = ٦ ∴ أضلاع المثلث = ٦ ، ٨ ، ١٠

∴ محيطه = ٦+٨+١٠ = ٢٤ سم

مثـــ٧ـــال : مستطيل محيطه ١٤ سم و مساحته ١٢ سم^{٢} أوجد بعدى المستطيل

الحـــــــــل

نفرض الطول = س , العرض = ص

مساحة المستطيل = الطول × العرض = = س × ص =١٢ (١)

محيط المستطيل =(الطول + العرض) × ٢ =(س + ص) ×٢=١٤

س + ص = ٧ ⟸ ص = ٧ - س (٢)

بالتعويض من (٢) عن قيمة ص فى (١) س ×(٧ – س) =١٢

- س^{٢} + ٧س - ١٢ = ٠

س^{٢} - ٧س + ١٢= (س – ٣)(س – ٤) = ٠

∴ س - ٣ = ٠ ⟸ س = ٣ من (٢) ∴ ص = ٧ - س = ٧ - ٣ =٤

أ، س - ٤ = ٠ ⟸ س = ٤ من (٢) ∴ ص = ٧ - س = ٧ - ٤ =٣

∴ ص = ٤ ∴ ص = ٣ ∴ بعدى المستطيل ٤ سم , ٣ سم

مثـ٨ـال : مثلث قائم الزاوية مجموع طولى ضلعى القائمة = ٧سم ، طول وتره = ٥سم أوجد مساحته

الحـــــل

نفرض أن ضلعى القائمة س ، ص ∴ س + ص = ٧ ∴ ص = ٧ – س (١)

من نظرية فيثاغورث ∴ س^٢ + ص^٢ = ٢٥ (٢)

بالتعويض من المعادلة الاولى فى الثانية ∴ س^٢ + (٧ – س)^٢ = ٢٥

∴ س^٢ + ٤٩ – ١٤ س + س^٢ – ٢٥ = ٠

٢س^٢ – ١٤ س + ٢٤ = ٠ ÷ ٢

∴ س^٢ – ٧ س + ١٢ = (س – ٣)(س - ٤) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ٤ منها ص = ٤ أ، ص = ٣

∴ مساحته = ١/٢ × ٤ × ٣ = ٦ سم^٢

مثـ٩ـال : مستطيل محيطه ١٤ سم و مساحته ١٢ سم^٢ أوجد بعدى المستطيل

الحـــــل

نفرض الطول = س , العرض = ص

مساحة المستطيل = الطول × العرض = ١٢ ⇐ = س × ص = ١٢ (١)

محيط المستطيل =(الطول + العرض) ×٢=١٤ ⇐ (س + ص) × ٢ = ١٤

س + ص = ٧ ⇐ ص = ٧ - س (٢)

بالتعويض فى م٫ عن قيمة ص : فى (١) س × (٧ - س) = ٧س - س^٢ = ١٢

- س^٢ + ٧س - ١٢ = ٠ ⇐ س^٢ - ٧س + ١٢ = (س – ٣)(س – ٤) = ٠

∴ س - ٣ = ٠ ⇐ س = ٣ من (٢) ص = ٧ - س ∴ ص = ٧ - ٣ = ٤

أ، س - ٤ = ٠ ⇐ س = ٤ من (٢) ص = ٧ - ٣ ∴ ص = ٧ - ٤ = ٣

∴ بعدى المستطيل ٤ سم , ٣ سم

مثال ١٠ : مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم , محيطه يساوى ٣٠ سم أوجد طولى ضلعى القائمة

الحل

نفرض طولى ضلعى القائمة س , ص

∵ محيط المثلث = س + ص + ١٣ = ٣٠

س + ص = ٣٠ - ١٣ = ١٧ ⟸ ص = ١٧ - س (١)

فى Δ أ ب ج القائم فى ب

[أ ب]^{٢} = [ب ج]^{٢} + [أ ج]^{٢} ⟸ س^{٢} + ص^{٢} = [١٣]^{٢} = ١٦٩ (٢)

بالتعويض من (١) عن قيمة ص فى (٢)

س^{٢} + (١٧ - س)^{٢} = س^{٢} + ٢٨٩ - ٣٤ س + س^{٢} = ١٦٩

٢س^{٢} - ٣٤ س + ٢٨٩ - ١٦٩ = ٠

٢س^{٢} - ٣٤ س + ١٢٠ = ٠ (÷ ٢)

س^{٢} - ١٧ س + ٦٠ = (س - ٥)(س - ١٢) = ٠

∴ س - ٥ = ٠ ⟸ س = ٥ من (١) ص = ١٧ - س = ١٧ - ٥ = ١٢

أ، س - ١٢ = ٠ ⟸ س = ١٢ من (١) ص = ١٧ - س = ١٧ - ١٢ = ٥

∴ طولا ضلعى القائمة ١٢ سم , ٥ سم

تمـــارين

١ ـ أختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) أحد حلول المعادلة : $س^{٢} + ص^{٢} = ٢$ فى ع هو ....

(أ) (–٢ ، ٢) (ب) (–١ ، ١) (ج) (٠ ، ٢) (د) (٢ ، ٠)

٢) أحد حلول المعادلتين : س ص = ٢ ، س – ص = ١ هو ....

(أ) (١ ، ١) (ب) (٢ ، ١) (ج) (١ ، ٢) (د) ($\frac{١}{٢}$ ، ١)

٣) إذا كانت س = ٢ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ فإن : ص ∈ ....

(أ) { ١ } (ب) { ٢ ، ٥ } (ج) { –١ ، ١ } (د) { –١ }

٤) مجموعة حل المعادلتين : ص = س ، س ص = ١ هى ....

(أ) { (١ ، ١) } ، { (٠ ، ٠) } (ب) { (١ ، ١) ، (–١ ، –١) }

(ج) { (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) } (د) { (٠ ، ٠) ، (–١ ، ١) }

٥) مجموعة حل المعادلتين : س – ص = ٠ ، $٣ س^{٢} – ص^{٢} = ١٨$ هى ....

(أ) { (٣ ، ٣) } (ب) { (–٣ ، –٣) } (ج) { (٣ ، ٣) ، (–٣ ، –٣) } (د) ∅

٦) إذا كان : ص = ١ – س ، $(س + ص)^{٢} + ص = ٥$ فإن : ص = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (ج) –٤ (د) ٢

٧) مجموعة حل المعادلتين : س ص = ٦ ، ص = س + ١ هى ....

(أ) { (٢ ، ٣) } (ب) { (–٣ ، ٢) } (ج) { (–٢ ، ٣) } (د) { (٢ ، ٣) ، (–٣ ، –٢) }

[٢] أوجد مجموعة الحل لكل زوج من أزواج المعادلات الآتية :

(١) س = ص ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$

(٢) ص = ٣ س ، $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

(٣) س – ص = ٢ ، س^2 – ٥ ص = ٤

(٤) س + ص = ٣ ، س ص = ٢

(٥) س – ص = ٣ ، س^2 + ص^2 = ١٧

(٦) س + ص = ٤ ، س^2 – س ص + ص^2 = ٧

(٧) س – ص = ٢ ، (س – ٢)^2 + ص^2 = ٣٢

(٨) ص = $\frac{٣}{٢}$ س , س^2 – ص^2 = ٥

(٩) س + ص = ٦ ، $\frac{١}{س}$ + $\frac{٥}{ص}$ = ٢

(١٠) ص = ٢ س + ٣ ، س (ص – ٣ س) = ٢

[٣] أجب عما يلى :

١) أوجد عددين نسبيين حاصل ضربهما = ٢ ، مجموع احدهما وضعف الآخر = ٤

٢) عددان حقيقيان الفرق بين مربعيهما = ٧ ، مجموعهما = ٧ فما هما العددان ؟

٣) عددان موجبان أحدهما يزيد عن ثلاثة أمثال الأخر بمقدار ١ , ومجموع مربعيهما ١٧ فم هما العددان ؟

٤) قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها = ١٠٨ م^2 فإذا كان طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٣ أمتار فأوجد بعدى قطعة الأرض

٥) مستطيل محيطه ١٦ سم ، مساحته ١٥ سم^2 اوجد بعديه

٦) عددان حقيقيان أكبرهما يساوى ضعف الأصغر مضافاً إليه ١ ، أربعة أمثال الأصغر مضافاً إليه مربع الأكبر يساوى ١٣ فما هما العددان ؟

٧) عدد مكون من رقمين مجموع مربعيهما مطروحاً منه حاصل ضربهما يساوى ١٣ ، فإذا كان العدد الأصلى يزيد عن العدد الناتج عن عكس وضع الرقمين بمقدار ٢٧ أوجد العدد الأصلى

٨) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى فيه : ب حـ – ٢ ا ب = ٢ ، ا حـ – ب حـ = ١ أوجد أطوال أضلاع هذا المثلث

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

تمهيد :

إذا كانت د : ع ← ع حيث د (س) = س^{٢} – ٩

فإن : د (٣) = (٣)^{٢} – ٩ = ٠ ، د (– ٣) = (– ٣)^{٢} – ٩ = ٠

لذا يسمى كل من : ٣ ، – ٣ أصفار الدالة د

بصفة عامة :

إذا كانت : د : ع ← ع دالة كثيرة حدود فى المتغير س فإن : قيم س التى تجعل " د (س) = ٠ "

تسمى مجموعة أصفار الدالة د " ويرمز لها بالرمز ص (د) "

أى أن : ص (د) هى مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠

⇦ لإيجاد أصفار الدالة : نضع د(س) = ٠ ، نحل المعادلة الناتجة ، منها نوجد مجموعة قيم س فتكون هى مجموعة أصفار الدالة

لاحظ : الفرق بين د , د (س) , ص (د)

** د : رمز للدالة ** د (س) : قاعدة الدالة

** ص (د) : مجموعة أصفار الدالة د

فمثلاً : إذا كانت : د (س) = س – ٣

نضع : س – ٣ = ٠ ∴ س = ٣ ∴ ص (د) = { ٣ }

إذا كانت : د (س) = س^{٣} – ٩ س

نضع : س^{٣} – ٩ س = ٠ ∴ س (س^{٢} – ٩) = ٠

∴ س (س – ٣)(س + ٣) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = ٣ ، س = – ٣

∴ ص (د) = { ٠ ، ٣ ، – ٣ }

إذا كانت : د (س) = ٤س^{٢} – ٦ س + ٩

نضع : ٤س^{٢} – ٦ س + ٩ = ٠

∴ ٤س^{٢} – ٦ س + ٩ = ٠ لا يمكن تحليل هذا المقدار لذا نستخدم القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ٤ \times ٩}}{٢ \times ٤} = \frac{٢٦ \pm \sqrt{-١٠٨}}{٢}$$

$\nexists$ ح ∴ لا توجد حلول حقيقية للدالة ∴ ص (د) = $\emptyset$

إذا كانت : د (س) = ٨

لا يوجد أى عدد حقيقى يجعل د (س) = ٠ ∴ ص (د) = $\emptyset$

مثـ١ـال : عين أصفار الدالة د(س) = س – ١

الحــــــل

نضع د(س) = ٠ ∴ س – ١ = ٠

∴ س = ١ ∴ ص (د) = { ١ }

مثـ٢ـال : عين أصفار الدالة د(س) = س^٢ – ٥ س +٦

الحــــــل

نضع د(س) = ٠ ∴ س^٢ – ٥ س + ٦ = (س – ٢)(س – ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣ ∴ ص (د) = { ٢ ، ٣ }

مثـ٣ـال : عين أصفار الدالة د(س) = س^٢ – ٤

الحــــــل

نضع د(س) = ٠ ∴ س^٢ – ٤ = (س – ٢)(س + ٢) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = -٢ ∴ ص (د) = { ٢ ، -٢ }

مثـ٤ـال : عين أصفار الدالة د(س) = س^٣ – س

الحــــــل

نضع د(س) = ٠ ∴ س^٣ – س = س (س^٢ – ١) = ٠

∴ س (س – ١)(س + ١) = ٠

∴ س=٠ أ، س=١ أ، س= -١ ∴ ص (د) = { ٠ ، ١ ، -١ }

تمارين على مجموعة أصفار الدالة

[١] إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١] مجموعة أصفار الدالة د (س) = س + ٣ هى ....

ⓐ { ٣ } ⓑ { – ٣ } ⓒ { ٣ ، – ٣ } ⓓ ح

[٢] مجموعة أصفار الدالة د (س) = ٥ – س هى ....

ⓐ { ٥ } ⓑ ح – { ٥ } ⓒ ح ⓓ { ٠ ، ٥ }

[٣] مجموعة أصفار الدالة د (س) = س^{٢} – ١ هى ....

ⓐ { ٠ ، ١ } ⓑ { – ١ ، ١ } ⓒ { ٠ ، – ١ } ⓓ ∅

[٤] مجموعة أصفار الدالة د (س) = س^{٢} – ٣ س هى ....

ⓐ { ٠ ، ٣ } ⓑ { ٠ ، – ٣ } ⓒ { ٣ } ⓓ { ٠ }

[٥] مجموعة أصفار الدالة د (س) = س^{٢} + ٩ هى ....

ⓐ { ٠ ، ٩ } ⓑ { ٠ ، – ٣ } ⓒ { ٠ } ⓓ ∅

[٦] مجموعة أصفار الدالة د (س) = (س – ١) (س + ٢) هى ....

ⓐ { – ١ ، ٢ } ⓑ { ١ ، – ٢ } ⓒ { ٢ } ⓓ { ١ }

[٧] مجموعة أصفار الدالة د (س) = س (س^{٢} – ٤ س + ٣) هى ....

ⓐ { ٠ ، ٣ } ⓑ { ٠ ، ١ ، ٣ } ⓒ { ١ ، ٣ } ⓓ { ٠ ، – ٣ }

[٢] اوجد مجموعة أصفار كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية فى ح :

[١] د (س) = ٣ س – ٦ [٢] د (س) = ٢

[٣] د (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} [٤] د (س) = س^{٢} – ٥ س + ٦

[٥] د (س) = س^{٢} – ٣ س – ١٠ [٦] د (س) = ٣ س^{٢} – ٥ س – ٢

[٧] د (س) = س (س^{٢} – ٩) – ٣ (س^{٢} – ٩)

[٣] إذا كان : س = – ١ أحد أصفار الدالة د حيث : د (س) = س^{٢} – ٢ س + ل
فأوجد قيمة : ل

[٤] إذا كان : { ١ ، ٣ } هى مجموعة أصفار الدالة د (س) = س^{٢} – م س + ل
فأوجد قيمة كل من : م ، ل

أصفار الدالة الكسرية

هى قيم س التى عندها الدالة تساوى صفر ونحصل عليها بوضع البسط = صفر ما عدا القيم التى تجعل المقام = صفر ونحصل عليها بعد وضع الدالة الكسرية فى أبسط صورة

مثـــ١ـــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س - ٢}{س - ٣}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ س – ٢ = ٠

∴ س = ٢ ∴ ص (د) = { ٢ }

مثـــ٢ـــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٤}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ $س^٢$ – ٩ = (س – ٣)(س + ٣) =٠

∴ س = ٣ أ، س = -٣ ∴ ص (د) = { ٣ ، -٣ }

مثـــ٣ـــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س + ٢}{س + ٣}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ س + ٢ = ٠

∴ س = – ٢ ∴ ص (د) = { - ٢ }

مثـــ٤ـــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^٢ + ٤}{س}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ $س^٢$ + ٤ = ٠ ∴ $س^٢$ = -٤ مرفوض

∴ لا يوجد أصفار للدالة ∴ ص (د) = $\varnothing$

مثـــ٥ـــال : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س}{س+٣}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر ∴ س = ٠ ∴ ص (د) = { ٠ }

مثـــال ٦ : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س^{٢} - ٥ س + ٦}$

الحـــل

نضع البسط = صفر ∴ $س^{٢} - ٤ س + ٣ = (س - ١)(س - ٣) = ٠$

∴ س = ١ أ، س = ٣ ∌ المجال ∴ ص (د) = { ١ }

مثـــال ٧ : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{(س^{٢} -١)(س^{٣} +٨)}{س^{٢} - ٤س +٣}$

الحـــل

نضع البسط = صفر ∴ $(س^{٢} - ١)(س^{٣} + ٨) = ٠$

∴ $س^{٢} = ١$ ، $س^{٣} = -٨$

∴ س = ± ١ ، س = -٢ ، س = ١ ∌ المجال ∴ ص (د) = { -٢ ، -١ }

مثـــال ٨ : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^{٢} - ٥}{س^{٢} - ١}$

الحـــل

نضع البسط = صفر ∴ $س^{٢} - ٥ = ٠$ ∴ $س^{٢} = ٥$

∴ س = $\pm\sqrt{٥}$ ∴ ص (د) = { $\sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٥}$ }

مثـــال ٩ : عين أصفار الدالة الكسرية الجبرية $\frac{س^{٣} - ٩ س}{س^{٣}}$

الحـــل

نضع البسط = صفر ∴ص $س^{٣} - ٩ س = س (س^{٢} - ٩) = ٠$

∴ س (س - ٣)(س + ٣) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٣ ، س = -٣

∴ ص (د) = { ٠، ٣ ، -٣ } - { ٠ } = { -٣، ٣ }

تمـــــارين على أصفار الدالة

[١] إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ١}$ هى ....

(أ) {-٢ ، ٢} (ب) {-٢ ، ٣} (جـ) {٢ ، -٣} (د) {٢}

[٢] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١٦}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$ هى ....

(أ) {-٤ ، ٤} (ب) {٤} (جـ) {-٥ ، ٥} (د) {٥}

[٣] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢٠\text{س}}{\text{س}^{٣} - ١٢٥}$ هى ....

(أ) {٠ ، -٤ ، ٥} (ب) {٠ ، -٤} (جـ) {-٤ ، ٥} (د) {٥}

[٤] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٢٥}$ هى ....

(أ) {-١} (ب) {٥ ، -٥} (جـ) {١} (د) {٠}

[٥] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$ هى ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٠ ، ٢ ، -٢} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {-١ ، ١}

[٦] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{١٦ - \text{س}^{٢}}{٢\text{س} - ٣}$ هى ....

(أ) $\{-\frac{٣}{٢}\}$ (ب) $\{\frac{٣}{٢}\}$ (جـ) {-٤ ، ٤} (د) {٣}

[٧] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠}{\text{س} - ١}$ هى ....

(أ) {-١ ، ٢} (ب) {١ ، -٢} (جـ) {٢ ، -٥} (د) {-٢ ، ٥}

[٨] مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{١ - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - ٨}$ هى ....

(أ) {١} (ب) {-٢} (جـ) {-١ ، ١} (د) {٢}

الدالة الكسرية الجبرية

تعريف :

إذا كان ق ، د كثيرتى حدود ، و كان ص (د) هى مجموعة أصفار د فإن الدالة

ن حيث : ن : ح – ص (د) ← ح ، $ن (س) = \frac{ق (س)}{د (س)}$

تسمى دالة كسرية جبرية حقيقية و إختصاراً تسمى " كسراً جبرياً "

لاحظ أن : مجال الدالة الكسرية الجبرية = ح – مجموعة أصفار المقام

مثـــال ١ : عين مجال كل من الدوال التالية : [١] $ن_١ (س) = \frac{س}{س - ٤}$

[٢] $ن_٢ (س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ١}$ [٣] $ن_٣ (س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٥ س + ٦}$

الحـــــــل

[١] نضع : س – ٤ = ٠ ومنها : س = ٤

∴ مجال $ن_١$ (س) = ح – { ٤ }

[٢] نضع : $س^٢$ – ١ = ٠ ∴ (س – ١)(س + ١) = ٠

∴ س = ١ ، س = – ١

∴ مجال $ن_٢$ (س) = ح – { ١ ، – ١ }

[٣] نضع : $س^٢$ – ٥ س + ٦ = ٠ ∴ (س – ٢)(س – ٣) = ٠

∴ س = ٢ ، س = ٣

∴ مجال $ن_٣$ (س) = ح – { ٢ ، ٣ }

مثـــال ٢ : عين مجال كل من الدوال التالية :

[١] $ن_١ (س) = \frac{س^٢ - ٨ س + ١٥}{س^٢ - ٢٥}$ [٢] $ن_٣ (س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٧س + ١٠}$

الحـــــــل

[١] نضع : $س^٢$ ـ ٢٥ = (س ـ ٥)(س + ٥) = ٠

∴ مجال $ن_١$ (س) = ح ـ { ٥ ، ـــ ٥ }

[٢] نضع : $س^٢$ ـ٧س + ١٠ = ٠ ∴ (س – ٢)(س ـ ٥) = ٠

∴ مجال $ن_٢$ (س) = ح ـ { ٢ ، ٥ }

∴ مجال ن٣ (س) = ح – { ٢ ، ٣ }

مثـ٣ـال : عين مجال كلا من الدوال الكسرية الجبرية الأتية

(١) ن (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٣}$ (٢) ن (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ٤}$

الحـــل

(١) نوجد أصفار المقام ∴ س – ٣ = ٠

∴ س = ٣ ∴ مجال الدالة = ح – { ٣ }

(٢) نوجد أصفار المقام ∴ س^٢ – ٤ = (س – ٢)(س + ٢) = ٠ ٠

∴ س = ٢ ، س = -٢ ∴ مجال الدالة = ح – { ٢ ، -٢ }

مثـ٤ـال : عين مجال كلا من الدوال الكسرية الجبرية الأتية

(١) ن١ (س) = س^٢ - ٦ س - ٤٠ (٢) ن٢ (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١٠ \text{س} + ٢١}{\text{س}^٢ - ٢٥}$

(٣) ن٣ (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٦ \text{س} + ٨}{\text{س}^٢ + ١٦}$ (٤) ن٤ (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١١ \text{س} + ١٠}{\text{س}^٢}$

الحـــل

(١) ن١ (س) = س^٢ - ٦ س - ٤٠

مجال د = ح - مجموعة أصفار المقام (لا يوجد مقام) ⟸ مجال = ح - ∅ = ح

(٢) ن٢ (س) = $\frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٧)}{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٥)}$ ⟸ مجال د = ح – {-٥ ، ٥ }

(٣) ن٣(س) = ح - مجموعة أصفار المقام ⟸ مجال = ح - ∅ = ح

(٤) ن٤(س) = ح - مجموعة أصفار المقام ⟸ مجال = ح - {صفر}

مثـ٥ـال : عين مجال كلا من الدوال الكسرية الجبرية الأتية

(١) ن (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣}$ (٢) ن (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + ٤}$

الحـــل

(١) نوجد أصفار المقام ∴ س + ٣ = ٠

∴ س = -٣ ∴ مجال الدالة = ح – { -٣ }

(٢) نوجد أصفار المقام ∴ س^٢ + ٤ = ٠ ∴ س^٢ = -٤ مرفوض

∴ لا يوجد أصفار للمقام ∴ مجال الدالة = ح

مثـ٦ـال : عين مجال كلا من الدوال الكسرية الجبرية الأتية

(أ) ن(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ - ٥\text{ س} + ٦}$ (ب) ن(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٣\text{ س} + ٥}{(\text{س} - ١)^٢}$

الحـــــــل

(أ) نوجد أصفار المقام ∴ $\text{س}^٢ - ٥\text{ س} + ٦ = (\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣) = ٠$

∴ س = ٢ ، س = ٣ ∴ مجال الدالة = ع − { ٢ ، ٣ }

(ب) نوجد أصفار المقام $(\text{س} - ١)^٢ = ٠$ س − ١ = ٠

∴ س = ١ ∴ مجال الدالة = ع − { ١ }

مثـ٧ـال : عين مجال كلا من الدوال الكسرية الجبرية الأتية

(١) ن(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤}{(\text{س}^٢ - ٩)(\text{س}^٣ + ٨)}$ (٢) ن(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٥\text{ س} + ٦}{\text{س}^٢ - \text{س}}$

الحـــــــل

(١) نوجد أصفار المقام ∴ $(\text{س}^٢ - ٩)(\text{س}^٣ + ٨) = ٠$

∴ $\text{س}^٢ = ٩$ ، $\text{س}^٣ = -٨$

∴ س = ± ٣ ، س = -٢ ∴ مجال الدالة = ع − { -٣ ، -٢ ، ٣ }

(٢) نوجد أصفار المقام ∴ $\text{س}^٢ - \text{س} = \text{س}(\text{س} - ١) = ٠$

∴ س = ٠ ، س = ١ ∴ مجال الدالة = ع − { ٠ ، ١ }

تمـــارين على مجال الدالة الكسرية

إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

س عين مجال كلا من الدوال الاتية

(١) د(س) = $\frac{س - ٥}{س + ٢}$ (أ) {−٢ ، ٥} (ب) {−٢} (جـ) ح − {٥} (د) ح − {−٢}

(٢) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} - ٩}$ (أ) ح − {٣} (ب) ح − {−٣ ، ٣} (جـ) ح − {−٣} (د) ح

(٣) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ٤س + ٤}$ (أ) ح − {−٢} (ب) ح − {٢} (جـ) {−٢ ، ١} (د) ح

(٤) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - س - ١٢}$

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٤ ، ٣} (جـ) {−٣ ، ٤} (د) ح − {−٣ ، ٤}

(٥) د(س) = $\frac{س^{٢} - س - ٢٠}{س^{٣} - س}$

(أ) ح − {٥ ، −٤} (ب) ح − {−٤ ، ٥} (جـ) ح − {−١ ، ١} (د) ح − {٠ ، −١ ، ١}

(٦) (س) = $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س^{٣} + ٥س^{٢} + ٦س}$

(أ) ح − {٠ ، −٢ ، −٣} (ب) ح − {−٥ ، ٢} (جـ) {−٥ ، ٢} (د) ح − {−٣ ، −٢}

(٧) د(س) = $\frac{س^{٢} - س}{س^{٢} - ٢س - ٢٤}$

(أ) ح − {٠ ، ١} (ب) ح − {٦ ، −٤} (جـ) {−٦ ، ٤} (د) ح − {−٦ ، ٤}

(٨) د(س) = $\frac{س^{٢} - ١٦}{س^{٢} + ٢٥}$ ح − {−٥ ، ٥}

(أ) ح − {٥ ، −٥} (ب) ح − {−٤ ، ٤} (جـ) ∅ (د) ح

(٩) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ١}$ ح − {١ ، −١}

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) ح − {−٣ ، ٢} (جـ) {١ ، −١} (د) ح

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر هو مجموعة الأعداد الحقيقية التى تكون فيها هذه الكسور معرفة معاً (فى آن واحد)

أى أن :

إذا كان : $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين و كان :

مجال $ن_١$ = ح ــ $س_١$ (حيث $س_١$ مجوعة أصفار مقام $ن_١$)

، مجال $ن_٢$ = ح ــ $س_٢$ (حيث $س_٢$ مجوعة أصفار مقام $ن_١$)

فإن : المجال المشترك للكسرين $ن_١$ ، $ن_٢$ = ح ــ ($س_١ \cup س_٢$)

= ح ــ مجموعة أصفار مقامى الكسرين = ح ــ مجموعة أصفار مقامى الكسرين

و يكون المجال المشترك لعدد من الكسور الجبرية =

= ح ــ مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور

مثــ١ــال : أوجد المجال المشترك للكسرين التاليين :

$ن_١ (س) = \frac{س^٢ + ٥}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س + ٧}{س^٤ - ١}$

الحــــــــل

نوجد أصفار مقام كلاً من الكسرين

نضع : $س^٣ - س^٢ = ٠$ ∴ $س^٢ (س - ١) = ٠$

∴ س = ٠ أو س = ١ ∴ مجال $ن_١$ (س) = ح - { ٠ ، ١ }

نضع : $س^٤ - ١ = ٠$ ∴ (س - ١) (س + ١) ($س^٢$ + ١) = ٠

∴ س = ١ أو س = - ١ ∴ مجال $ن_٢$ (س) = ح - { ١ ، - ١ }

∴ المجال المشترك للكسرين = ح ــ { ١ ، ٠ ، - ١ }

مثــ٢ــال : أوجد المجال المشترك للكسرين التاليين :

$ن_١ (س) = \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٨}{س^٢ - ٨س + ١٢}$

الحــــــــل

نوجد أصفار مقام كلاً من الكسرين

نضع : س^{٢} ـ ٥س+٦ = ٠ ∴ (س ـ ٢) (س ـ ٣) = ٠

∴ س = ٢ أو س = ٣ ∴ مجال ن$_{١}$ (س) = ع ـ { ٢ ، ٣ }

نضع : س^{٢} ـ ٨س+١٢ = ٠ ∴ (س ـ ٢) (س ـ ٦) = ٠

∴ س = ٢ أو س = ٦ ∴ مجال ن$_{٢}$ (س) = ع ـ { ٢ ، ٦ }

∴ المجال المشترك للكسرين = ع ـ { ٢ ، ٣ ، ٦ }

مثـــ٣ـــال : أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الاتية

ن$_{١}$ (س) = $\frac{س ـ ٣}{س}$ ، ن$_{٢}$ (س) = $\frac{س ـ ١}{س ـ ٢}$

الحـــــــــل

نوجد أصفارمقام الكسر الاول س = ٠

نوجد أصفار مقام الكسر الثانى س ـ ٢ = ٠ س = ٢

المجال المشترك = ع ـ { ٠ ، ٢ }

مثـــ٤ـــال : أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الاتية

ن$_{١}$ (س) = $\frac{س}{٥}$ ، ن$_{٢}$ (س) = $\frac{٣}{س +٢}$ ، ن$_{٣}$ (س) = $\frac{س^{٢}}{س^{٣} ـ ٨}$

الحـــــــــل

نوجد أصفار مقام الكسر الأول ٥ = ٠ مرفوض (ليس له أصفار)

نوجد أصفار مقام الكسر الثانى س +٢ = ٠ ∴ س = ـ٢

نوجد أصفار مقام الكسر الثالث س^{٣} ـ ٨ = ٠ ⟸ س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

∴ المجال المشترك = ع ـ { ـ٢ ، ٢ }

مثـــ٥ـــال : أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الاتية

ن$_{١}$ (س) = $\frac{س ـ ١}{س +٢}$ ، ن$_{٢}$ (س) = $\frac{س^{٢} ـ ٢س +١}{س^{٢} ـ ٩}$

الحـــــــــل

نوجد أصفار مقام الكسر الأول س + ٢ = ٠ ∴ س = ـ٢

نوجد أصفار مقام الكسر الثانى س^{٢} ـ ٩ = (س ـ ٣)(س +٣) = ٠

∴ س = ٣ ، س = ـ٣ ∴ المجال المشترك = ع ـ { ـ٢ ، ٣ ، ـ٣}

تمارين على مجال الدالة

أولاً: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١] مجال الدوال ر(س) = $\frac{س - ٥}{٣}$

(أ) ح - {٣} (ب) ح - {٥} (جـ) ح - {٣ ، ٥} (د) ح

[٢] مجال الدالة ن (س) = $\frac{٣}{س (س + ١)}$ هو .....

(أ) ح - {١} (ب) ح - {- ١} (جـ) ح (د) ح - {- ١ ، ٣}

[٣] مجال الدالة ر (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ + ٤}$ هو .....

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {- ٤} (جـ) ح (د) ح - {- ٢ ، ٢}

[٤] مجال الدالة ر (س) = س^٢ + ٩ هو .....

(أ) ح - {٣} (ب) ح - {- ٣} (جـ) ح (د) ح - {- ٣ ، ٣}

[٥] المجال المشترك للدالتين ر$_١$ (س) = $\frac{٣}{٥س}$ ، ر$_٢$ (س) = $\frac{س - ١}{٤}$ هو .....

(أ) ح - {٤} (ب) ح - {٠} (جـ) ح (د) ح - {٤ ، ٠}

[٦] المجال المشترك للدالتين ر$_١$ (س) = $\frac{٢}{س - ٣}$ ، ر$_٢$ (س) = $\frac{١}{س + ٥}$ هو ....

(أ) ح - {٣} ، (ب) ح - {- ٥} (جـ) ح (د) ح - {٣ ، - ٥}

ثانيًا: أوجد المجال المشترك لمجموعات الكسور الجبرية التالية :

[١] ر$_١$ (س) = $\frac{٥}{س^٢ - ٤}$ ، ر$_٢$ (س) = $\frac{١}{٢ س + ٤}$

[٢] ر$_١$ (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ ، ر$_٢$ (س) = $\frac{٢ س + ٣}{س^٢ - س - ١٢}$

[٣] ر$_١$ = $\frac{٥ س^٢ - ٧}{س^٢ + ٢ س - ٨}$ ، ر$_٢$ = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٤ س + ٤}$ ، ر$_٣$ = $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٢ س + ٤}$

ثالثًا: إذا كان مجال الدالة ر (س) = $\frac{٤س - ٨}{س^٢ - ٤ س + ك}$ هو ح - {٢} أوجد قيمة ك

إختزال الكسر الجبرى

إختزال الكسر الجبرى :

وضع الكسر الجبرى فى أبسط صورة يسمى بإختزال الكسر الجبرى

خطوات إختزال الكسر الجبرى :

[١] نحلل كلاً من بسط و مقام الكسر الجبرى تحليلاً تاماً

[٢] نعين مجال الكسر الجبرى

[٣] نحذف العوامل المشتركة فى كل من البسط و المقام

تعريف : يقال إن الكسر الجبرى فى أبسط صورة له إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسطه و مقامه

مثـــال١ : إذا كانت $ن (س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١}$

أختصر ن (س) إلى أبسط صورة مبيناً مجال ن (س)

الحـــــل

$ن (س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١} = \frac{س (س - ١)}{(س + ١) (س - ١)}$

مجال ن (س) = ح - { ١ ، - ١ }

∴ $ن (س) = \frac{س}{س - ١}$ بحذف (س - ١) من البسط و المقام

مثـــال٢ : اختزل كلا من الكسور الجبرية الأتية مبيناً مجال كلا منها

$ن_١ (س) = \frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س^٢ - ٩}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

الحـــــل

$ن_١ (س) = \frac{(س - ٣)(س - ٢)}{(س - ٣)(س + ٣)}$

المجال = ح - { ٣ ، -٣ }

$ن_١ (س) = \frac{س - ٢}{س + ٣}$

$ن_٢ (س) = \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س + ٢)}$

المجال = ح - { ٢ ، -٢ }

$ن_٢ (س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س + ٢}$

مثـ٣ـال : اختزل كلا من الكسور الجبرية الأتية مبيناً مجال كلاً منها

$ن_١(س) = \frac{س^٣ - ٤س^٢ + ٣س}{س^٣ - س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٢س - ١٥}$

الحـــــــــل

$ن_١(س) = \frac{س(س - ٣)(س - ١)}{س(س - ١)(س + ١)}$

المجال = ع − { ٠ ، ١ ، −١ } $ن_١(س) = \frac{س - ٣}{س + ١}$

$ن_٢(س) = \frac{(س + ٣)(س - ٢)}{(س - ٥)(س + ٣)}$

المجال = ع − { ٥ ، −٣ } $ن_٢(س) = \frac{س - ٢}{س - ٥}$

تساوى كسرين جبريين

يقال أن الدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ متساويتان (أى : $ن_١ = ن_٢$) إذا تحقق الشرطان التاليان معاً :

[١] مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

[٢] $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لكل س ∈ المجال المشترك

مثـ١ـال : إذا كان : $ن_١(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٣ - ٢س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٣ - ٤س^٢ + ٤س}$

اثبت أن : $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لكل قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك و أوجد هذا المجال

الحـــــــــل

∵ $ن_١(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٣ - ٢س^٢} = \frac{س(س - ١)}{س^٢(س - ٢)} = \frac{س - ١}{س(س - ٢)}$

، مجال $ن_١$ = ع − { ٠ ، ٢ }

، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٣ - ٤س^٢ + ٤س} = \frac{(س - ٢)(س - ١)}{س(س - ٢)(س - ٢)} = \frac{س - ١}{س(س - ٢)}$

، مجال $ن_٢$ = ع − { ٠ ، ٢ }

∴ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لأن : مجال $ن_١(س)$ = مجال $ن_٢(س)$

و يكون $ن_١(س) = ن_٢(س)$ " أى يأخذان نفس القيم " إذا كانت س

التى تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين ن١ ، ن٢ و هو ع ـ { ٠ ، ١ ، ٢ }

مثـــ٢ـــال : إذا كان ن١ (س) = $\frac{س^٢ + ٣س +٢}{س^٢ - ٤}$ ، ن٢ (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٣ س +٢}$

هل ن١ = ن٢ ثم أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان

الحـــــــــل

ن١ (س) = $\frac{(س + ٢)(س + ١)}{(س +٢)(س - ٢)}$ = $\frac{س +١}{س - ٢}$ المجال = ع - { ٢ ، -٢ }

ن٢ (س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ٢)(س - ١)}$ = $\frac{س +١}{س - ٢}$ المجال = ع - { ٢ ، ١ }

ن١ ≠ ن٢ (بسبب أختلافهما فى المجال)

المجال الذى تتساوى فيه الدالتان = ع ـ { ٢ ، -٢ ، ١ }

مثـــ٣ـــال : إذا كان ن١ (س) = $\frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٩ س}$ ، ن٢ (س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$

إثبت أن ن١ = ن٢ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين وأوجد هذا المجال

الحـــــــــل

ن١ (س) = $\frac{س (س^٢ - س - ٦)}{س (س^٢ - ٩)}$ = $\frac{س(س - ٣)(س +٢)}{س(س - ٣)(س +٣)}$ = $\frac{س +٢}{س +٣}$

مجال ن١ = ع - { ٠ ، ٣ ، -٣ }

ن٢ (س) = $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٣)(س - ٢)}$ = $\frac{س +٢}{س + ٣}$

المجال = ع - { ٢ ، ٣ } ⇐ ن١ ≠ ن٢ (بسبب أختلافهما فى المجال)

ولكن ن١ = ن٢ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك بين الدالتين

المجال المشترك = ع - { ٠ ، ٢ ، -٣ ، ٣ }

مثـــ٤ـــال : إذا كان ن١ (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ ، ن٢ (س) = $\frac{س}{س^٢ - ٥س}$

هل $ن_١ = ن_٢$ مع ذكر السبب

الحل

$ن_١(س) = \frac{١}{س - ٥}$ ⟸ مجال $ن_١$ = ع − { ٥ }

$ن_٢(س) = \frac{س}{س(س - ٥)} = \frac{١}{س - ٥}$ ⟸ مجال $ن_٢$ = ع − { ٠ ، ٥ }

∵ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بعد الاختصار

و لكن مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$ ⟸ $ن_١ \neq ن_٢$

مثـال ٥ : إذا كان $ن_١(س) = \frac{٢ س}{٢ س - ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٥ س}{٥س - ١٠}$

هل $ن_١ = ن_٢$ مع ذكر السبب

الحل

$ن_١(س) = \frac{٢ س}{٢(س - ٢)} = \frac{س}{س - ٢}$ ⟸ مجال $ن_١$ = ع − { ٢ }

$ن_٢(س) = \frac{٥ س}{٥(س - ٢)} = \frac{س}{س - ٢}$ ⟸ مجال $ن_٢$ = ع − { ٢ }

∵ مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ بعد الاختصار ⟸ $ن_١(س) = ن_٢(س)$

مثـال ٦ : إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٣ س + ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$

إثبت أن $ن_١ = ن_٢$ فى المجال المشترك وأوجد هذا المجال

الحل

$ن_١(س) = \frac{(س - ٢)(س + ٣)}{(س - ٢)(س - ١)} = \frac{س + ٣}{س - ١}$ ⟸ مجال $ن_١$ = ع − { ١ ، ٢ }

$ن_٢(س) = \frac{(س - ٥)(س + ٣)}{(س - ٥)(س - ١)} = \frac{س + ٣}{س - ١}$ ⟸ مجال $ن_٢$ = ع − { ١ ، ٥ }

∵ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بعد الاختصار و لكن مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$

⟸ $ن_١ \neq ن_٢$ المجال المشترك = ع − { ١ ، ٢ ، ٥ }

تمارين على تساوى كسرين

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

[١] الدالة ن (س) = $\frac{٤س^٢ - ٢س}{٢س}$ فى أبسط صورة هى ....

ⓐ ٢ س ⓑ ٢ س ـ ١ ⓒ ٤ س^٢ ـ ١ ⓓ صفر

[٢] للدالتين ن$_١$ (س) = $\frac{س}{س^٢ + س}$ ، ن$_٢$ (س) = $\frac{١}{س + ١}$ يكون :
ن$_١$ = ن$_٢$ لكل س ∈ ....

ⓐ ع ـ { ١ } ⓑ ع ـ { ٠ } ⓒ ع ⓓ ع ـ { ١ ، ـ١ ، ٠ }

[٣] إذا كان ن$_١$ (س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ، ن$_٢$ (س) = س + ٢ فإن :
ن$_١$ = ن$_٢$ فى المجال ....

ⓐ ع ـ { ٢ } ⓑ ع ـ { ـ٢ } ⓒ ع ⓓ ع ـ { ـ١ }

[٤] إذا كان س ≠ ٣ فإن : أبسط صورة للكسر الجبرى ن (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ هى ....

ⓐ ٣ ⓑ ١ ⓒ ـ ١ ⓓ صفر

[٥] إذا كان ن (س) = $\frac{س}{٣س - ٢}$ فإن ن (صفر) = ...

ⓐ ٢ ⓑ ٣ ⓒ ١ ⓓ صفر

[٦] إذا كان ن (س) = $\frac{س^٢ - س}{س - ١}$ فإن ن (٢) = ...

ⓐ ٢ ⓑ ٦ ⓒ ٣ ⓓ صفر

[٧] إذا كان ن$_١$ (س) = $\frac{ك + ١}{س - ١}$ ، ن$_٢$ (س) = $\frac{٤}{س - ١}$ و كان :
ن$_١$ (س) = ن$_٢$ (س) فإن ك = ...

ⓐ ٢ ⓑ ٣ ⓒ ١ ⓓ صفر

[٨] أبسط صورة للكسر ن (س) = $\frac{س^٢ - ك}{س^٢ + ٤س + ٤}$: هى $\frac{س - ٢}{س + ٢}$ فإن ك =

ⓐ ٢ ⓑ ٤ ⓒ ٨ ⓓ صفر

[٢] أختصر الكسور التالية لأبسط صورة :

(١) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦}$ (٢) $ن(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - س - ١٢}$

(٣) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٤س + ٤}$ (٤) $ن(س) = \frac{س^٢ + ٣}{س^٢ + س - ٢}$

(٥) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - س - ٦}$ (٦) $ن(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٢س + ٤}$

(٧) $ن(س) = \frac{(س - ٢)^٢ - ١}{س^٢ - ٢س + ٤}$ (٨) $ن(س) = \frac{٢س^٢ + ٧س + ٦}{٤س^٢ + ٤س - ٣}$

[٣] فى كل مما يأتى هل : $ن_١(س) = ن_٢(س)$ ولماذا ؟؟

١) $ن_١(س) = \frac{س}{س^٢ - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٥س}{٥س^٢ - ٥}$

٢) $ن_١(س) = \frac{٢س^٢ - ١٠س - ٢٨}{٢س^٢ + ٢س - ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س^٢ - ٥س - ١٤}{س^٢ + س - ٢}$

٣) $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س^٢ - ٥س - ٧}{٢س^٢ - ٩س + ١٤}$

٤) $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦}{س^٣ - ٩س}$

(٤) إذا كان $ن_١(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ٤س + ٣}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$

أثبت أن $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين و أوجد هذا المجال

(٥) إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٦س - ٧}{س^٢ - ٩س + ١٤}$

أثبت أن $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين و أوجد هذا المجال

العمليات على الكسور الجبرية

أولاً : جمع و طرح الكسور الجبرية

قاعدة جمع و طرح كسرين جبريين هى نفس قاعدة جمع و طرح عددين نسبيين وبالتالى يمكن إجراء عملية جمع أو طرح كسرين جبريين متحدى المقام أو مختلفى المقام كما يلى

إذا كان $س \in$ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_1(س)$ ، $ن_2(س)$ حيث :

[١] $ن_1(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \frac{د_3(س)}{د_2(س)}$

" كسرين جبريين متحدى المقام "

فإن : $ن_1(س) + ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} + \frac{د_3(س)}{د_2(س)} = \frac{د_1(س) + د_3(س)}{د_2(س)}$

، $ن_1(س) - ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} - \frac{د_3(س)}{د_2(س)} = \frac{د_1(س) - د_3(س)}{د_2(س)}$

[٢] $ن_1(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

" كسرين جبريين مختلفى المقام "

فإن : $ن_1(س) + ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} + \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

$$= \frac{د_1(س) \times د_4(س) + د_2(س) \times د_3(س)}{د_2(س) \times د_4(س)}$$

، $ن_1(س) - ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} - \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

$$= \frac{د_1(س) \times د_4(س) - د_2(س) \times د_3(س)}{د_2(س) \times د_4(س)}$$

ملاحظات :

* مجال الكسر الجبرى : $ن_١$ (س) + $ن_٢$ (س) هو المجال المشترك للكسرين : $ن_١$ (س) ، $ن_٢$ (س)

* لكل كسر جبرى ن(س) يوجد معكوس جمعى هو : ـ ن (س)

فمثلاً : المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{س - ٢}{س - ٣}$ هو الكسر الجبرى ـ $\frac{س - ٢}{س - ٣}$

، وهو أيضاً : $\frac{٢ - س}{س - ٣}$ أو $\frac{س - ٢}{٣ - س}$

لجمع (طرح) كسرين جبريين " أو أكثر " نتبع الآتى :

١ ـ نرتب حدود بسط ومقام كل كسر حسب الأسس تنازلياً أو تصاعدياً (تنازلياً أفضل)

٢ ـ نحلل بسط ومقام كل كسر جبرى إن أمكن " مجموع وفرق بين مكعبين أولاً "

٣ ـ نوجد المجال المشترك

٤ ـ نبسط كل كسر على حدة " نختصر الكسر "

٥ ـ نوحد المقامات للكسور

٦ ـ نجرى عملية الجمع (الطرح)

٧ ـ نبسط الناتج

مثـ١ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجالها

$$ن(س) = \frac{٣}{س - ١} + \frac{٢}{س - ١}$$

الحـــــــل

$$ن(س) = \frac{٣ + ٢}{س - ١} = \frac{٥}{س - ١}$$

⟸ مجال ن = ع ـ {١}

مثـ٢ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{٢ س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢}$$

الحـــــــل

$$ن(س) = \frac{٢ س + ٤}{س + ٢} = \frac{٢(س + ٢)}{س + ٢} = ٢$$

المجال = ع ـ { ـ ٢ }

مثـ٣ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجالها

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣} + \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$$

الحــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٣}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} + \frac{\text{س} - ٢}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)} = \frac{١}{\text{س} - ١} + \frac{١}{\text{س} - ٣}$$

$$= \frac{\text{س} - ٣ + \text{س} - ١}{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٣)} = \frac{٢\text{س} - ٤}{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٣)} \Leftarrow \text{المجال} = \text{ع} - \{٣ ، ١ ، ٢\}$$

مثـ٤ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة وعين مجال ن حيث

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{٢} - ١} + \frac{٤}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$$

الحــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} + \frac{٤}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)} = \frac{٢(\text{س} - ٢) + ٤(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$$

$$= \frac{٢\text{س} - ٤ + ٤\text{س} + ٤}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)} = \frac{٦\text{س}}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)} \quad \text{المجال} = \text{ع} - \{١ ، -١ ، ٢\}$$

مثـ٥ـال : إذا كان : $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{٣\text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}$ ، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}$

أوجد : $\text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_{١}(\text{س}) + \text{ن}_{٢}(\text{س})$

الحــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)} + \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ١)(\text{س} + ٣)}$$

حيث مجال ن(س) = ع − { −١ ، ٢ ، −٣ }

$$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س} + ١} + \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١} = \frac{٣ + \text{س} - ٢}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} + ١} = ١$$

مثـال٦ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة وعين مجال ن حيث

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{٧س} - \text{٧}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٢٠}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٢}}$$

الحـــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{٧(س} - \text{١)}}{\text{(س} - \text{٣)(س} - \text{١)}} + \frac{\text{(س} + \text{٥)(س} - \text{٤)}}{\text{(س} - \text{٢)(س} - \text{٤)}}$$

حيث مجال ن(س) = ح − { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

$$\therefore \text{ن(س)} = \frac{\text{٥}}{\text{س} - \text{٣}} + \frac{\text{س} + \text{٥}}{\text{س} - \text{٢}} = \frac{\text{٥(س} - \text{٢)} + \text{(س} + \text{٥)(س} - \text{٣)}}{\text{(س} - \text{٣)(س} - \text{٢)}}$$

$$= \frac{\text{٥س} - \text{١٠} + \text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} - \text{١٥}}{\text{(س} - \text{٣)(س} - \text{٢)}} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٧س} - \text{٢٥}}{\text{(س} - \text{٣)(س} - \text{٢)}}$$

مثـال٧ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{س} - \text{١}} + \frac{\text{س} - \text{٢}}{\text{س} + \text{٤}}$$

الحـــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{(س+٣)(س+٤)} + \text{(س-١)(س-٢)}}{\text{(س} - \text{١)(س} + \text{٤)}} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٧س} + \text{١٢} + \text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٢}}{\text{(س} - \text{١)(س} + \text{٤)}}$$

$$= \frac{\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٤س} + \text{١٤}}{\text{(س} - \text{١)(س} + \text{٤)}}$$

المجال = P − { ١ ، ٤- }

مثـال٨ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} + \frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦س} + \text{٥}}$$

الحـــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}}{\text{(س} - \text{١)(س} + \text{١)}} + \frac{\text{٢}}{\text{(س} - \text{١)(س} - \text{٥)}}$$

$$= \frac{\text{س(س} - \text{٥)} + \text{٢(س} + \text{١)}}{\text{(س} - \text{١)(س} + \text{١)(س} - \text{٥)}} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٢س} + \text{٢}}{\text{(س} - \text{١)(س} + \text{١)(س} - \text{٥)}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)(\text{س} - ٥)} = \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)(\text{س} - ٥)}$$

$$= \frac{\text{س} - ٢}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٥)}$$

المجال = ع − { ١ ، −١ ، ٥ }

مثـ٩ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٢}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤} + \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٠}$$

الحـــــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٦)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٢)} + \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٥)}$$

$$= \frac{\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} + \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س} - ٦ + \text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{٢\text{س} - ٥}{\text{س} - ٢}$$

مثـ١٠ـال : إذا كان : $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣}$ ، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩}{\text{س}^{٣} - ٢٧}$

أوجد : $\text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_{١}(\text{س}) + \text{ن}_{٢}(\text{س})$

الحـــــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣} + \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩}{(\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩)}$$

$$= \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣} + \frac{١}{\text{س} - ٣}$$

حيث مجال ن(س) = ع − { ٣ ، −٣ }

$$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣) + (\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٩}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$$

تمارين على جمع الكسور الجبرية

س أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

(١) $ن(س) = \frac{س}{س+١} + \frac{١}{س+١}$

(٢) $ن(س) = \frac{٥س}{س+٢} + \frac{١٠}{س+٢}$

(٣) $ن(س) = \frac{٢س - ٧}{س - ٥} + \frac{٢ - س}{س - ٥}$

(٤) $ن(س) = \frac{س^{٣} - ٩}{س - ٢} + \frac{١}{س - ٢}$

(٥) $ن(س) = \frac{٢س^{٢}}{٢س+٥} + \frac{٢س^{٢} - ٢٥}{٢س+٥}$

(٦) $ن(س) = \frac{س}{س+٢} + \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤}$

(٧) $ن(س) = \frac{س}{س^{٢} - س} + \frac{س + ١}{س^{٢} - ١}$

(٨) $ن(س) = \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} - ٩} + \frac{١}{س+٣}$

(٩) $ن(س) = \frac{٣س+١٥}{س^{٢} + ٧س+١٠} + \frac{٢س+١}{س+٢}$

(١٠) $ن(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ٣س + ٢} + \frac{س+١}{س+٢}$

(١١) $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س + ٤}{س^{٣} + ٨} + \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + س - ٢}$

(١٢) $ن(س) = \frac{٢س^{٢} - ٦س + ١٨}{س^{٣} + ٢٧} + \frac{٦س - ١٢}{س^{٢} + س - ٦}$

(١٣) $ن(س) = \frac{٢س - ٦}{س^{٢} - ٥س + ٦} + \frac{٣س+٩}{س^{٢} + س - ٦}$

(١٤) $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + س - ٢} + \frac{٣س - ١}{٣س^{٢} - ٤س + ١}$

(١٥) $ن(س) = \frac{٣س+١٥}{س^{٢} + ٧س + ١٠} + \frac{٢س^{٢} - ٣س - ٢}{س^{٢} - ٤}$

طرح الكسور الجبرية

قاعدة الطرح :-

$$\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{ب} = \frac{أ - جـ}{ب} \quad و أن \quad \frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{ء} = \frac{أ \times ء - ب \times جـ}{ب ء}$$

مثـ١ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{٧}{س - ١} - \frac{٢}{س - ١}$$

الحـــــل

$$ن(س) = \frac{٧ - ٢}{س - ١} = \frac{٥}{س - ١}$$

المجال = ع - { ١ }

مثـ٢ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{٤س}{س - ٢} - \frac{٨}{س - ٢}$$

الحـــــل

$$ن(س) = \frac{٤س - ٨}{س - ٢} = \frac{٤(س - ٢)}{س - ٢} = ٤$$

المجال = ع - { ٢ }

مثـ٣ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٢}{س^٢ - ٣س + ٢} - \frac{٧س - ١٠}{س^٢ - ٣س + ٢}$$

الحـــــل

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٧س + ١٠}{س^٢ - ٣س + ٢} = \frac{(س - ٢)(س - ٥)}{(س - ١)(س - ٢)} = \frac{س - ٥}{س - ١}$$

المجال = ع - { ١ ، ٢ }

مثـ٤ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٢}{س - ١} + \frac{س}{١ - س}$$

الحـــــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{-(\text{س} - ١)} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١} - \frac{\text{س}}{\text{س} - ١} = \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ١}$$

$$= \frac{\text{س}(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)} = \text{س}$$

المجال $= \text{ع} - \{١\}$

مثـال٥ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٠}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦} - \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٥}$$

الحـــــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)} - \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٥)(\text{س} - ٣)}$$

مجال ن $= \text{ع} - \{٣ , ٢ , ٥\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٣)} - \frac{(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٣)} = \frac{\text{س} - ٥ - \text{س} - ٢}{(\text{س} - ٣)} = \frac{-٧}{\text{س} - ٣}$$

مثـال٦ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩}{\text{س}^{٣} - ٢٧} - \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}{٩ - \text{س}^{٢}}$$

الحـــــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩}{(\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩)} - \frac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٣)}{-(\text{س}^{٢} - ٩)}$$

$$= \frac{١}{\text{س} - ٣} + \frac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} = \frac{١}{\text{س} - ٣} + \frac{\text{س} - ٤}{\text{س} - ٣} = \frac{١ + \text{س} - ٤}{\text{س} - ٣}$$

$$= \frac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٣} = ١$$

المجال $= \text{ع} - \{٣ ، -٣\}$

مثـ٧ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨} - \frac{٩ - س^٢}{س^٢ + س - ٦}$$

الحـــــــل

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)} - \frac{-(س^٢ - ٩)}{(س - ٢)(س + ٣)}$$

$$ن(س) = \frac{١}{س - ٢} + \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٢)(س + ٣)}$$

مجال ن = ع − {٢ , −٣}

$$ن(س) = \frac{١ + س - ٣}{س - ٢} = \frac{س - ٢}{س - ٢} = ١$$

مثـ٨ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{٤}{س^٢ - ٤س - ٥} + \frac{٢}{١ - س^٢}$$

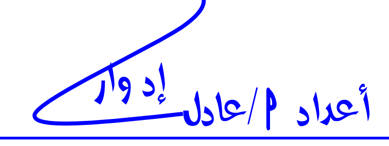
الحـــــــل

$$ن(س) = \frac{٤}{س^٢ - ٤س - ٥} + \frac{٢}{-(س^٢ - ١)} = \frac{٤}{(س-٥)(س+١)} - \frac{٢}{(س-١)(س+١)}$$

$$= \frac{٤(س - ١) - ٢(س - ٥)}{(س-٥)(س+١)(س-١)} = \frac{٤س - ٤ - ٢س + ١٠}{(س-٥)(س+١)(س-١)}$$

$$= \frac{٢س + ٦}{(س-٥)(س+١)(س-١)}$$

المجال = ع − {٥ ، −١ ، ١}



مثـــ٩ـــال : إذا كان : $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{س^٣ + ٨}$ ، $ن_٢(س) = \frac{١ - س^٢}{س^٢ + س - ٢}$

أوجد : $ن(س) = ن_١(س) - ن_٢(س)$

الحـــــــــل

$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{س^٣ + ٨} - \frac{١ - س^٢}{س^٢ + س - ٢}$

$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{س^٣ + ٨} + \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س - ٢}$

$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)} + \frac{(س + ١)(س - ١)}{(س - ١)(س + ٢)}$

حيث مجال $ن(س) = ح - \{-٢ ، ١\}$

$\therefore ن(س) = \frac{١}{س + ٢} + \frac{س + ١}{س + ٢} = \frac{س + ٢}{س + ٢} = ١$

مثـــ١٠ـــال : إذا كان : $ن_١(س) = \frac{س - ٢}{س + ٣}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{س^٣ - ٢٧}$

أوجد : $ن(س) = ن_١(س) - ن_٢(س)$

الحـــــــــل

$ن(س) = \frac{س - ٢}{س + ٣} - \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}$

$= \frac{س - ٢}{س + ٣} - \frac{١}{س - ٣}$

حيث مجال $ن(س) = ح - \{٣ ، -٣\}$

$\therefore ن(س) = \frac{(س - ٢)(س - ٣) - (س + ٣)}{(س + ٣)(س - ٣)} = \frac{س^٢ - ٦س + ٣}{(س + ٣)(س - ٣)}$

تمارين على طرح الكسور الجبرية

[١] إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١] إذا كان: س ≠ ٠ فإن : $\frac{٣}{س} + \frac{٤}{س} =$ ....

(أ) $\frac{٧}{س^٢}$ (ب) $\frac{٧}{س}$ (جـ) $\frac{٧}{٢س}$ (د) $\frac{١٢}{٢س}$

[٢] المعكوس الجمعى للكسر $\frac{س+١}{س-٣}$ هو ....

(أ) $\frac{س-١}{س-٣}$ (ب) $\frac{١-س}{٣-س}$ (جـ) $\frac{س+١}{٣-س}$ (د) $\frac{س+١}{س+٣}$

[٣] مجال المعكوس الجمعى للكسر $\frac{س+١}{س-٣}$ هو ....

(أ) ع − {٣ ، −١} (ب) ع − {٣} (جـ) ع − {١} (د) ع

[٤] $\frac{س}{س-٢} - \frac{٢}{س-٢} = ١$ لكل س ∈ ....

(أ) {٢ ، ١} (ب) ع − {٢} (جـ) {٢} (د) ع

[٥] أبسط صورة للمقدار : $\frac{س}{س+٥} - \frac{-٥}{س+٥}$ حيث : س ≠ −٥ هى ....

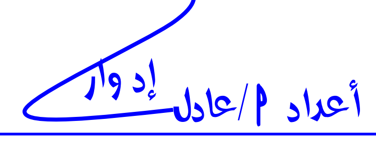
(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) −٥

[٦] ن(س) = $\frac{س}{س-٣} - \frac{س}{٣-س} =$ ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢س (د) $\frac{٢س}{س-٣}$

[٧] مجال الدالة : ن(س) = $\frac{س-٢}{س-٣} - \frac{س-٢}{س+٣}$ هو ....

(أ) ع − {١ ، −٣} (ب) ع − {−٣ ، ٢} (جـ) ع − {٣ ، ٢} (د) ع − {٢ ، ٠}



س أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

(١) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٥س}}{\text{س} - ٢} - \frac{١٠}{\text{س} - ٢}$

(٢) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٢س}}{\text{س} - ٣} - \frac{٦}{\text{س} - ٣}$

(٣) $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٥} - \frac{٥}{\text{س} - ٥}$

(٤) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٣س} - ١}{\text{س} - ٢} - \frac{٥}{\text{س} - ٢}$

(٥) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٢س} + ١١}{\text{س} + ٥} - \frac{١}{\text{س} + ٥}$

(٦) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٣س} + ٢}{\text{س} - ٥} - \frac{١٧}{\text{س} - ٥}$

(٧) $\text{ن(س)} = \frac{٣}{\text{س} - ٢} - \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}$

(٨) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٢س} + ١٠}{\text{س}^٢ + \text{٧س} + ١٠} - \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$

(٩) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٣س} - ١٥}{\text{س}^٢ - \text{٦س} + ٥} - \frac{\text{٣س}^٢ + \text{٣س}}{\text{س}^٢ - ١}$

(١٠) $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٣ + \text{س}^٢ + \text{س}}{\text{س}^٣ - ١} - \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - ١}$

(١١) $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ١} + \frac{\text{س}}{١ - \text{س}^٢}$

(١٢) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٣س}}{\text{س} + ١} - \frac{\text{٢س} - ١}{\text{س} + ١}$

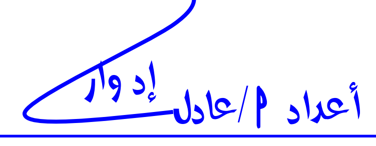
(١٣) $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$

(١٤) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٢س} - ١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢} - \frac{١}{\text{س} - ٢}$

(١٥) $\text{ن(س)} = \frac{٤}{\text{٤س}^٢ - ١} - \frac{١}{\text{٢س}^٢ - \text{س}}$

(١٦) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٣س}}{\text{س}^٢ - \text{٢س}} - \frac{١٢}{\text{س}^٢ - ٤}$

(١٧) $\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦} - \frac{\text{س}^٢ - \text{٣س} - ١٠}{\text{س}^٢ - \text{٤س} - ٥}$



ضرب الكسور الجبرية

* لكل كسر جبرى $ن(س) \neq ٠$ يوجد معكوس ضربى هو مقلوب الكسر و يرمز له بالرمز $ن^{-١}(س)$

فإذا كان : $ن(س) = \frac{س + ٣}{س - ٤}$ حيث : مجال $ن(س) = ح - \{٤\}$

* و بالتالى يمكن إجراء عملية ضرب أو قسمة كسرين جبريين كما يلى :

إذا كان : $ن_١(س)$ ، $ن_٢(س)$ كسرين جبريين حيث :

$ن_١(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)}$ فإن :

$$ن_١(س) \times ن_٢(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} \times \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)} = \frac{د_١(س) \times د_٣(س)}{د_٢(س) \times د_٤(س)}$$

حيث : س ∈ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_١(س)$ ، $ن_٢(س)$

أى : $ح - \{ص(د_٢) \cup ص(د_٤)\}$

مثـ١ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{٣س + ٦}{س^٢ - ٩} \times \frac{س - ٣}{٢س - ٤}$$

الحـــــل

$$ن(س) = \frac{٣(س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٣)} \times \frac{س - ٣}{٢(س + ٢)} = \frac{٣}{٢(س + ٣)}$$

المجال $= ح - \{٣ ، -٣ ، ٢\}$

مثـ٢ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س^٢ + ٣س - ١٨} \times \frac{س + ٢}{س^٢ + س - ٢٠}$$

الحـــــل

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٥)}{(س - ٣)(س + ٦)} \times \frac{(س + ٢)}{(س - ٤)(س + ٥)} = \frac{(س + ٢)}{(س + ٦)(س - ٤)}$$

المجال $= ح - \{٣ ، -٦ ، ٤ ، -٥\}$

مثـــال ٣ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ - ١} \times \frac{س^٢ - س}{س^٢ + ٣س}$$

الحـــل

$$ن(س) = \frac{(س - ٤)(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)} \times \frac{س(س - ١)}{س(س + ٣)} = \frac{س - ٤}{س + ٣}$$

المجال = ع − { ٠ ، ١ ، −١ ، −٣ }

مثـــال ٤ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ + س - ٦} \times \frac{٢س + ٦}{س^٢ + ٢س + ٤}$$

الحـــل

$$ن(س) = \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س + ٣)(س - ٢)} \times \frac{٢(س + ٣)}{س^٢ + ٢س + ٤} = ٢$$

المجال = ع − { −٣ ، ٢ }

مثـــال ٥ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ١٢س + ٣٦}{س^٢ - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{٣٦ - س^٢}$$

الحـــل

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ١٢س + ٣٦}{س^٢ - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{-(س^٢ - ٣٦)}$$

$$= \frac{(س - ٦)(س - ٦)}{س(س - ٦)} \times \frac{٤(س + ٦)}{-(س - ٦)(س + ٦)} = \frac{-٤}{س}$$

المجال = ع − { ٠ ، ٦ ، −٦ }

مثـــال ٦ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٣ - ٢٧} \times \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{٢س + ٢}$$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)} \times \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩}{٢(\text{س} + ١)} = \frac{١}{٢}$$

المجال = ع − { ٣ ، −١ }

مثـ٧ـال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤} \times \frac{٣\text{س}^٢ - \text{س} - ١٠}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}$$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٢)} \times \frac{(٣\text{س} + ٥)(\text{س} - ٢)}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤} = ٣\text{س} + ٥$$

المجال = ع − { ٢ ، −٢ }

مثـ٨ـال : إذا كان $\text{ن}_١\text{(س)} = \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٢}{٢\text{س} + ٤}$ ، $\text{ن}_٢\text{(س)} = \frac{٢}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١}$

أوجد : $\text{ن(س)} = \text{ن}_١\text{(س)} \times \text{ن}_٢\text{(س)}$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ١)}{٢(\text{س} + ٢)} \times \frac{٢}{(\text{س} + ١)(\text{س} + ١)} = \frac{٢}{(\text{س} + ١)}$$

حيث مجال ن(س) = ع − { −١ ، −٢ }

مثـ٩ـال : إذا كان $\text{ن}_١\text{(س)} = \frac{\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦}$ ، $\text{ن}_٢\text{(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٤}$

أوجد : $\text{ن(س)} = \text{ن}_١\text{(س)} \times \text{ن}_٢\text{(س)}$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} + ٢)} \times \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)}$$

حيث مجال ن(س) = ع − { −٢ ، −٣ ، ١ , ٢ }

$$\therefore \text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$$

تمارين على ضرب الكسور الجبرية

س أوجد $\text{ن}(\text{س})$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

(١) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{2}{\text{س}^2+\text{س}} \times \frac{\text{س}+1}{4}$

(٢) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+1}{3\text{س}-6} \times \frac{6}{2\text{س}+2}$

(٣) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+2}{\text{س}^2-4} \times \frac{2\text{س}-4}{\text{س}-3}$

(٤) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-3\text{س}-4}{\text{س}+3} \times \frac{\text{س}-1}{\text{س}^2-1}$

(٥) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+3\text{س}+2}{\text{س}^2-9} \times \frac{\text{س}-3}{\text{س}+2}$

(٦) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+1}{\text{س}^2-\text{س}-2} \times \frac{\text{س}^2+3\text{س}-10}{\text{س}^2+5\text{س}}$

(٧) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3-8}{\text{س}^2+\text{س}-6} \times \frac{2\text{س}+6}{\text{س}^2+2\text{س}+4}$

(٨) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{3\text{س}+6}{\text{س}^2-4} \times \frac{\text{س}-2}{2\text{س}+6}$

(٩) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-5\text{س}+6}{\text{س}-2} \times \frac{\text{س}^2+3\text{س}+9}{\text{س}^3-27}$

(١٠) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-3\text{س}-4}{\text{س}^2-1} \times \frac{\text{س}^2-\text{س}}{\text{س}^2+3\text{س}}$

(١١) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-5\text{س}+6}{\text{س}^2-9} \times \frac{\text{س}^2+5\text{س}+6}{\text{س}^2-4}$

(١٢) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3+2\text{س}^2}{\text{س}^3+1 \quad 5\text{س}+5} \times \frac{\text{س}^2-\text{س}+1}{\text{س}^2}$

(١٣) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+6}{} \times \frac{\text{س}^2+3\text{س}-18}{\text{س}^2-2\text{س}-3}$

(١٤) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3-8}{(\text{س}-2)^3} \times \frac{\text{س}^2-4}{\text{س}^2+2\text{س}+4}$

قسمة الكسور الجبرية

* لكل كسر جبرى ن(س) ≠ ٠ بوجد معكوس ضربى هو مقلوب الكسر

و يرمز له بالرمز $ن^{-1}$ (س)

فإذا كان : ن(س) = $\frac{س + ٣}{س - ٤}$ فإن : $ن^{-1}$ (س) = $\frac{س - ٤}{س + ٣}$

حيث : مجال ن(س) = ح - { ٤ } ، مجال $ن^{-1}$ (س) = ح - { ٤ ، -٣ }

و يكون : ن(س) × $ن^{-1}$ (س) = ١

* و بالتالى يمكن إجراء عملية قسمة كسرين جبريين كما يلى :

إذا كان : $ن_1$ (س) ، $ن_2$ (س) كسرين جبريين حيث :

$ن_1$ (س) = $\frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2$ (س) = $\frac{د_3(س)}{د_4(س)}$ فإن :

$ن_1$ (س) ÷ $ن_2$ (س) = $\frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ÷ $\frac{د_3(س)}{د_4(س)}$ = $\frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ × $\frac{د_4(س)}{د_3(س)}$

و يكون مجال $ن_1$ (س) ÷ $ن_2$ (س) هو المجال المشترك لكل من :

$ن_1$ (س) ، $ن_2$ (س) ، $ن_2^{-1}$ (س)

أى : ح - { ص (د₂) ∪ ص (د₃) ∪ ص (د₄) }

مثـــ١ـــال : إذا كان ن(س) = $\frac{س^2 - ٥ س + ٦}{س^2 - ٩}$ أوجد

(١) المجال الذى يكون فيه للكسر معكوس ضربى (٢) $ن^{-1}$ (١) ، $ن^{-1}$ (٣) ،

(٣) قيمة س التى تحقق أن $ن^{-1}$ (س) = $\frac{٣}{٥}$

الحـــــل

$ن^{-1}$ = $\frac{س^2 - ٩}{س^2 - ٥ س + ٦}$ = $\frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)(س - ٢)}$ = $\frac{س + ٣}{س - ٢}$

المجال = ح - { ٣ ، -٣ ، ٢ }

$\therefore$ ن$^{-1}$ (١) = $\frac{١+٣}{١ - ٢}$ = $\frac{٤}{-١}$ = - ١

ن$^{-1}$ (٢) غير معرفة لان العدد ٢ $\not\ni$ لمجال الدالة

ن$^{-1}$ (س) = $\frac{٣}{٥}$ $\therefore$ $\frac{س +٣}{س - ٢}$ = $\frac{٣}{٥}$

$\therefore$ ٥ س +١٥ = ٣س - ٦ $\therefore$ ٥س - ٣س = - ٦ - ١٥

$\therefore$ ٢ س = - ٢١ $\therefore$ س = $\frac{-٢١}{٢}$

مثـــ٢ـــال : إذا كان ن(س) = $\frac{س^٢ - ٢ س}{(س^٢ - ٤)}$ أوجد

(١) أوجد ن$^{-1}$(س) و عين مجاله ، (٢) ن$^{-1}$ (١) ، ن$^{-1}$ (٢) أن أمكن

الحـــــل

ن$^{-1}$ = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٢ س}$ = $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س (س - ٢)}$ = $\frac{س + ٢}{س}$

مجال ن$^{-1}$ = ع - { ٢ , -٢ , ٠ }

ن$^{-1}$(١) = $\frac{(١+٢)}{١}$ = ٣ ، ن$^{-1}$(٢) غير معرفة لأن ٢ $\not\ni$ مجال الدالة

مثـــ٣ـــال : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

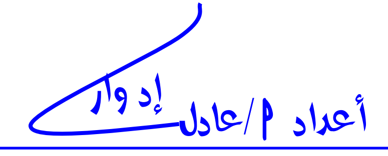
ن(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٣ - ١}$ ÷ $\frac{س + ١}{س}$

الحـــــل

ن(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٣ - ١}$ ÷ $\frac{س + ١}{س}$ = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$ × $\frac{س}{س +١}$

المجال = ع - { ١ ، ٠ ، -١ }

ن(س) = $\frac{س}{س^٢ + س +١}$



مثـال٤ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩} \div \frac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$$

الحـــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩} \times \frac{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}{٢\text{س} - ١٠}$$

$$= \frac{(\text{س}-٥)(\text{س}+٣)}{(\text{س}+٣)(\text{س}-٣)} \times \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}-٣)}{٢(\text{س}-٥)}$$

المجال = ع − { ٣ ، −٣، ٥ }

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{٢}$$

مثـال٥ : أوجد ن(س) $= \frac{(\text{س}-٥)}{(\text{س}-١)} \div \frac{(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٣)}$

الحـــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س}-٥)}{(\text{س}-١)} \times \frac{(\text{س}-٣)}{(\text{س}+٢)} = \frac{(\text{س}-٥)(\text{س}-٣)}{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)}$$

المجال = ع − { ٣ ، ١، −٢ }

مثـال٦ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦} \div \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}{٢\text{س} + ٦}$$

الحـــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦} \times \frac{٢\text{س} + ٦}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٣)} \times \frac{٢(\text{س} + ٣)}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤} = ٢$$

المجال = ع − { −٣ ، ٢ }

مثـال٧ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦} \div \frac{٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٤\text{س}^{٢} - ٩}$$

الحـــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦} \times \frac{٤\text{س}^{٢} - ٩}{٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$$

$$= \frac{\text{س}(\text{س} - ٣)}{(٢\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)} \times \frac{(٢\text{س} - ٣)(٢\text{س} + ٣)}{\text{س}(٢\text{س} - ٣)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٢}$$

المجال = ح − $\{ \frac{-٣}{٢} ، ٢ ، ٠ ، \frac{٣}{٢} \}$

مثـال٨ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} - ١} \div \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}$$

الحـــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} - ١} \times \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}{\text{س} - ١}$$

$$= \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)} \times \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}{\text{س} - ١} = ١$$

المجال = ح − $\{ ١ \}$

مثـال٩ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢٠} \div \frac{٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٢\text{س}^{٢} - ٧\text{س} - ١٥}$$

الحـــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢٠} \times \frac{٢\text{س}^{٢} - ٧\text{س} - ١٥}{٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$$

$$= \frac{\text{س}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤)}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)} \times \frac{(٢\text{س} + ٣)(\text{س} - ٥)}{\text{س}(٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣)}$$

$$= \frac{\text{س}(\text{س} + ٤)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)} \times \frac{(٢\text{س} + ٣)(\text{س} - ٥)}{\text{س}(٢\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)} = ١$$

المجال = ح − $\{ -٤ ، ٥ ، ٠ ، ١ ، \frac{-٣}{٢} \}$

مثـــال ١٠ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩} \div \frac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$$

الحـــــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩} \times \frac{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}{٢\text{س} - ١٠}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} \times \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٣)}{٢(\text{س} - ٥)} = \frac{\text{س} - ٣}{٢}$$

المجال = ح − { ٣ ، −٣ ، ٥ }

مثـــال ١١ : إذا كان : $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}$ ،

$\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}$ أوجد : $\text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_{١}(\text{س}) \div \text{ن}_{٢}(\text{س})$

الحـــــــل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ٣)} \div \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}$$

حيث مجال ن(س) = ح − { −٢ ، −٣ ، ١ ، ٢ }

$$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ٣)} \times \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$$

تمارين على قسمة الكسور

أولاً: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١] ن(س) = $\frac{س - ١}{س}$ له معكوس ضربى فى المجال ....

(أ) ع - {١} (ب) ع - {٠} (جـ) ع - {٠ ، ١} (د) ع

[٢] إذا كانت : د (س) = $\frac{س}{س - ٣}$ فإن : مجال د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) ع - {٣} (ب) ع - {٠ ، -٣} (جـ) ع - {٠ ، ٣} (د) ع - {-٣}

[٣] المعكوس الضربى للكسر $\frac{س - ٣}{س + ٤}$ هو ....

(أ) $\frac{س - ٤}{س + ٣}$ (ب) $\frac{س - ٤}{س - ٣}$ (جـ) $\frac{س + ٤}{س + ٣}$ (د) $\frac{س + ٤}{س - ٣}$

[٤] المعكوس الضربى للكسر $\frac{٢س + ٤}{س - ٤}$ هو ....

(أ) $\frac{س + ٢}{٢}$ (ب) $\frac{س - ٢}{س + ٢}$ (جـ) $\frac{٢}{س + ٢}$ (د) $\frac{س - ٢}{٢}$

[٥] إذا كانت : د (س) = $\frac{س - ١}{س + ٣}$ فإن : د$^{-١}$ (٠) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) -٣

[٦] إذا كانت : د (س) = $\frac{س + ٣}{س^٣ + ٢٧}$ فإن : د$^{-١}$ (١) = ...

(أ) ٧ (ب) -٧ (جـ) $\frac{١}{٧}$ (د) $-\frac{١}{٧}$

ثانيًا : أوجد المجال الذى يكون فيه لكل من الكسور الجبرية الاتية معكوس ضربى وأوجد هذا المعكوس فى أبسط صورة :

(١) $ن(س) = \frac{س}{٥}$

(٢) $ن(س) = \frac{٧}{س}$

(٣) $ن(س) = \frac{س - ٢}{س}$

(٤) $ن(س) = \frac{س}{س + ٣}$

(٥) $ن(س) = \frac{س + ٣}{س - ١}$

(٦) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

(٧) $ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ٢س + ١}$

(٨) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ + ٣س - ١٠}$

(٩) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ - ٤}$

(١٠) $ن(س) = س^٢ - ٩$

(١١) $ن(س) = س^٢ - ٣س + ٢$

(١٢) $ن(س) = س$

[٢] إذا كانت $ن(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س^٢ - ١}$ أوجد $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة وعين مجاله ثم أوجد $ن^{-١}(١)$ ، $ن^{-١}(٢)$ إن أمكن ذلك

[٣] إذا كانت $ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٥س + ٦}$ أوجد $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة وعين مجاله ثم أوجد $ن^{-١}(٠)$ ، $ن^{-١}(٢)$ إن أمكن ذلك

[٤] إذا كانت $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ - ١}$ أوجد $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة وعين مجاله ثم أوجد $ن^{-١}(١)$ ، $ن^{-١}(٢)$ إن أمكن ذلك

[٥] أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال

(١) $ن(س) = \frac{س}{س + ٣} \div \frac{س}{س - ٢}$

(٢) $ن(س) = \frac{س}{س - ٥} \div \frac{س - ٣}{س - ٥}$

(٣) $ن(س) = \frac{س - ٢}{س + ١} \div \frac{س - ٢}{س - ٣}$

(٤) $ن(س) = \frac{س}{س + ٢} \div \frac{س - ٢}{س}$

(٥) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢} \div \frac{س^٢}{س^٢ - ٤}$

(٦) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢} \div \frac{س + ٣}{س}$

تمـــارين عامة على الوحدة

[١] فى كلاً مما يأتى أوجد ن(س) فى أبسط صورة مع بيان المجال :

١) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ٩} + \dfrac{١}{\text{س} + ٣}$

٢) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١} + \dfrac{\text{س}}{١ - \text{س}}$

٣) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦} + \dfrac{٣\text{س} + ٩}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$

٤) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ١} + \dfrac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - \text{س}}$

٥) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} +} + \dfrac{٨}{٤ - \text{س}}$

٦) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢} + \dfrac{\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٠}$

٧) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٩} - \dfrac{٢\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$

٨) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢} + \dfrac{١}{١ - \text{س}}$

٩) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}} - \dfrac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢}{٤ - \text{س}^{٢}}$

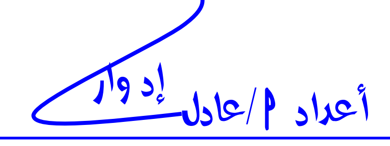
١٠) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{٣\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٥} - \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٨}{٩ - \text{س}^{٢}}$

[٢] أوجد فى أبسط صورة المعكوس الضربى للكسور الآتية مع بيان المجال :

١) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٥}{\text{س} - ٩}$

٢) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}$

٣) $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$



[٣] أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال فى كل مما يأتى :

١) $ن(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٣س + ٢} \times \frac{٢س^{٢} + س - ٣}{س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤س}$

٢) $ن(س) = \frac{٣س^{٢} - ٦س}{س^{٢} - ٤} \times \frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س^{٢} + س}$

٣) $ن(س) = \frac{٢س + ١٠}{س^{٢} - ٣س} \times \frac{س^{٢} - ٨س + ١٥}{س^{٢} - ٢٥}$

٤) $ن(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ٣س + ٢} \div \frac{س^{٢} -}{س^{٢} + ٢}$

٥) $ن(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - س - ٢} \div \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س^{٢} + ٤س + ٣}$

[٤] إذا كان مجال الدالة د : $د(س) = \frac{ك}{س} + \frac{٩}{س + أ}$ هو : ح − {٠ ، −٤}

، د (٥) = ٢ أوجد قيمة كل من : ك ، أ

[٥] إذا كان : $د(س) = \frac{س^{٢} + ٣}{س^{٢} + س - ٦}$ أوجد : $د^{-١}(س)$ وعين مجاله

، إذا كان $د^{-١}(س) = ٢$ فاوجد قيمة س

[٦] إذا كان مجال الدالة $د(س) = \frac{س + ٥}{س - ك}$ هو ح − {٢} أوجد قيمة ك

، هل د (س) لها معكوس ضربى ؟

[٧] إذا كان : $د(س) = \frac{س + ٢}{س^{٢} - ٤} \div \frac{س - ٣}{٢س - ٤}$ أوجد د (س) فى أبسط صورة مبيناً مجال د ثم أوجد د (٢) ، د (١) إن أمكن

[٨] إذا كان : $د(س) = \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} - ٩} \div \frac{س - ٢}{س^{٣} + ٢٧}$

أوجد: د (س) فى أبسط صورة ، إذا كان : د (س) = ٩ أوجد قيمة س

العمليات على الأحداث

نعلم أن :

التجربة العشوائية :

هى تجربة يمكن معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلاً إلا بعد إجرائها

فضاء العينة " ف " :

هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية

أمثلة لتجارب عشوائية و فضاء العينة لكل منها و عدد عناصرها :

التجربة العشوائية	النتائج الممكنة	عدد العناصر
إلقاء قطعة نقود مرة واحدة	صورة ، كتابة	٢
نوع المولود لأسرة (دون وجود توأم)	ولد ، بنت	٢
إلقاء حجر نرد مرة واحد و ملاحظة عدد النقاط على الوجه العلوى	١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦	٦
تكوين عدد مكون من الرقمين ١ ، ٣	١١ ، ١٣ ، ٣١ ، ٣٣	٤
نتيجة مباراة كرة قدم	فوز ، تعادل ، خسارة	٣

أنواع الأحداث :

* **الحدث المستحيل** هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه و يعبر عنه بالرمز $\emptyset$ ، ل ($\emptyset$) = ٠
* **الحدث المؤكد** هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة و يعبر عنه بالرمز ف،ل (ف) = ١
* **الحدث الممكن** : هو بعض النواتج الممكنة للتجربة و يعبر عنه بالرمز مثلاً (م)

ملاحظات :

* أى حدث م $\subset$ ف ، و إحتمال حدوثه = كسراً أى أن : ٠ $\leqslant$ ل (م) $\leqslant$ ١

* يمكن كتابة الإحتمال فى صورة كسر إعتيادى أو كسر عشرى أو نسبة مئوية كما يلى

مؤكد الحدوث	غالباً	أحياناً	نادراً	مستحيل الحدوث
١	$\frac{٣}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	٠
١٠٠ ٪	٧٥ ٪	٥٠ ٪	٢٥ ٪	٠ ٪

إحتمال وقوع الحدث

الحدث مجموعة جزئية من فضاء العينة

أنواع الاحداث

(١) الحدث الاولى (البسيط) :- هو الحدث الذى يحتوى على عنصر واحد من ف

(٢) الحدث المؤكد :- هو الحدث الذى يحتوى على جميع عناصر الفضاء (ف)

(٣) الحدث المستحيل: هو الحدث الذى لا يحتوى على أية عناصر (المجموعة الخالية ϕ)

إحتمال وقوع حدث ما ؎ يعطى من القانون :

$$ل (؎) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ؎}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{ن (؎)}{ن (ف)}$$

حيث : ل (؎) إحتمال وقوع الحدث (؎) ، ن (؎) عدد عناصر الحدث (؎)
، ن (ف) عدد عناصر فضاء العينة ف

مثـ١ـال : فى تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة أكتب فضاء العينة ثم عين احتمال كلا من الاحداث الاتية

(١) ؎ = حدث ظهور عدد فردى (٢) ب = حدث ظهور عدد أولى

(٣) جـ = حدث ظهور عدد فردى ، أولى (٤) ء = حدث ظهور عدد فردى أو أولى

الحـــــــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ن (ف) = ٦

(١) ؎ = حدث ظهور عدد فردى = {١ ، ٣ ، ٥ } ∴ ن (؎) = ٣

$∴ ل(؎) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

(٢) ب = حدث ظهور عدد أولى= { ٢ ، ٣ ، ٥ } ∴ ن (ب) = ٣

$∴ ل(ب) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

(٣) جـ = حدث ظهور عدد فردى ، أولى = { ٣ ، ٥ } ∴ ن (جـ) = ٢

$∴ ل(جـ) = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

(٤) ء = حدث ظهور عدد فردى أو أولى= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } ∴ ن (ء) = ٤

$∴ ل (ء) = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

مثـ٢ـال : سلة بها ١٥ بطاقات مرقمة من ١ الى ١٥ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيا أكتب فضاء العينة ثم عين كلا من أحتمال الاحداث الاتية

(١) م حدث ظهور عدد زوجى (٢) ب حدث ظهور عدد أولى

(٣) جـ حدث ظهور عدد زوجى أولى (٤) ء حدث ظهور عدد زوجى أو أولى

الحـــــــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ...... ، ١٥} ن (ف) = ١٥

(١) م = حدث ظهور عدد زوجى = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ }

ن (م) = ٧ ∴ ل(م) = $\frac{٧}{١٥}$

(٢) ب = حدث ظهور عدد أولى = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣}

ن (ب) = ٦ ∴ ل(ب) = $\frac{٦}{١٥}$ = $\frac{٢}{١٥}$

(٣) جـ = حدث ظهور عدد زوجى وأولى = { ٢ }

ن (جـ) = ١ ∴ ل(جـ) = $\frac{١}{١٥}$

(٤) ء = حدث ظهور عدد زوجى أو أولى

ء = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣}

ن (ء) = ١٢ ∴ ل(ء) = $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

مثـ٣ـال : سلة بها ٢٠ كرة بها ٨ كرات حمراء ، ٧ كرات بيضاء ، ٥ كرات صفراء فإذا سُحبت كرة واحدة عشوائيا أوجد أحتمال أن تكون الكرة المسحوبة

(١) حمراء (٢) حمراء أو صفراء (٣) ليست صفراء

الحـــــــــــل

أحتمال أن تكون الكرة حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٨}{٢٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

احتمال أن تكون الكرة حمراء أو صفراء = $\frac{\text{عدد الحمراء + عدد الصفراء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{١٣}{٢٠}$

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست صفراء = $\frac{\text{عدد الحمراء + عدد البيضاء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{١٥}{٢٠}$

مثـ٤ـال : صندوق به ١٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٠ خلطت و سحبت بطاقة عشوائياً أوجد إحتمال الأحداث التالية :

[١] الحدث (ﺃ) هو : عدد يقبل القسمة على ٢

[٢] الحدث (ب) هو : عدد يقبل القسمة على ٣

[٣] الحدث (حـ) هو : عدد يقبل القسمة على ٢،و يقبل القسمة ٣ فى نفس الوقت

الحـــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } ، ن (ف) = ١٠

[١] الحدث (ﺃ) = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ، ن (ﺃ) = ٥

ل (ﺃ) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث ﺃ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$ = $\frac{\text{ن (ﺃ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥ = ٥٠ ٪

[٢] الحدث (ب) = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ، ن (ب) = ٣

ل (ب) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث ب}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$ = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣ = ٣٠ ٪

[٣] الحدث (حـ) = { ٦ } ، ن (جـ) = ١

ل (حـ) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث حـ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$ = $\frac{\text{ن (حـ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{١٠}$ = ٠,١ = ١٠٪

مثـ٥ـال : فى تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية مرة واحدة فقط و ملاحظة الوجه العلوى إحسب الإحتمالات الآتية : (ﺃ) ظهور صورة (ب) ظهور كتابة

الحـــــــل

ف = { صورة,كتابة } ن (ف) = ٢

(ﺃ) ظهور صورة ⟸ الحدث ﺃ = { صورة } ن (ﺃ) = ١

ل (ﺃ) = $\frac{\text{ن (ﺃ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥ = ٥٠٪

(ب) ظهور كتابة ⟸ الحدث ب = { كتابة } ن (ب) = ١

ل (ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥ = ٥٠٪

مثـ٦ـال : في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فقط و ملاحظة الوجه العلوى إحسب الإحتمالات الآتية :

الحـــــــل

(أ) حدث ظهور عدد زوجي = { ٢ ، ٤ ، ٦} ⇐ ل (أ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(ب) حدث ظهور عدد فردى ={١ ، ٣ ، ٥} ⇐ ل (ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(جـ) حدث ظهور عدد أولى ={٢ ، ٣ ، ٥} ⇐ ل (جـ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(ء) حدث ظهور عدد أقل من ٤ ={١ ، ٢ ، ٣} ⇐ ل (ء) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(هـ) حدث ظهور عدد أولى زوجى ={٢} ⇐ ل (هـ) = $\frac{١}{٦}$

(و) حدث ظهور عدد أولى فردى ={٣ ، ٥} ⇐ ل (هـ) = $\frac{٢}{٦}$

(ز) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ ={٣ ، ٦} ⇐ ل (ز) = $\frac{٢}{٦}$

(س) حدث ظهور عدد أكبر من ٦ = $\emptyset$ ⇐ ل (س) = صفر

(ص) حدث ظهورعدد صحيح يحقق المتباينة صفر < س < ٧

={١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ⇐ ل (ص) = $\frac{٦}{٦}$ = ١

العمليات على الأحداث

حيث أن الأحداث هى مجموعات جزئية من فضاء العينة لذا فإن العمليات على الأحداث هى نفس العمليات على المجموعات مثل التقاطع و الإتحاد

و بإعتبار أن فضاء العينة (ف) المجموعة الشاملة يمكن التعبير عن الأحداث و العمليات عليها بأشكال فن كما يلى :

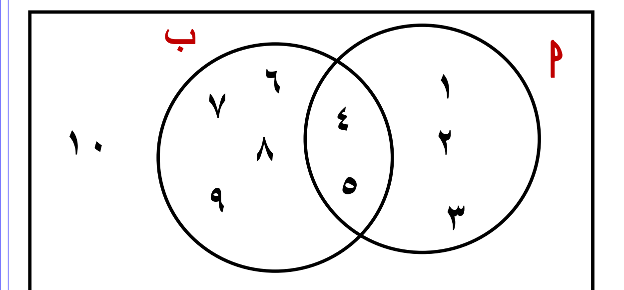
ف
أ ب
أ ∩ ب

أولا : التقاطع

إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن :

تقاطع الحدثين ٲ ، ب و الذى يرمز له بالرمز ٲ ∩ ب
يعنى حدث وقوع ٲ و ب معاً

و يكون : ل (ٲ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (ٲ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}}$



مثـــــال

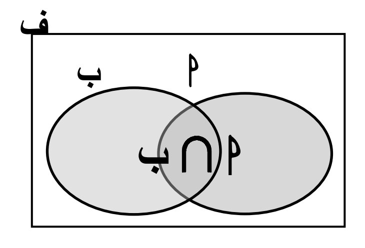
: ل (ٲ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (ٲ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٢}{١٠}$ = ٠,٢

و يمكن حساب التقاطع بالعلاقة التالية

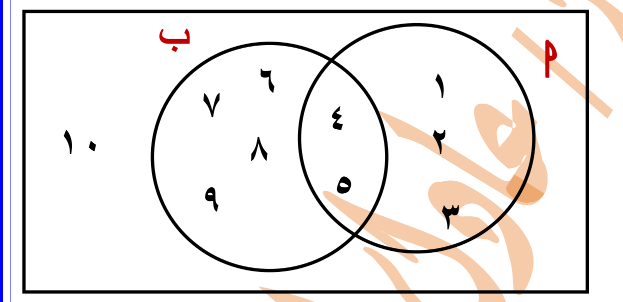
ل (ٲ ∩ب) = ل (ٲ) + ل (ب) - ل (ٲ∪ب) = ٠,٥+ ٠,٦ ــ ٠,٩ = ٠,٢

ملاحظة :
يقال أن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة عنصراً من عناصر المجموعة التى تعبر عن هذا الحدث

ثانيًا : الاتحاد



إذا كان : ٲ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن :
إتحاد الحدثين ٲ ، ب و الذى يرمز له بالرمز ٲ ∪ ب يعنى حدث وقوع ٲ أو ب ، أو كلاهما ، أى حدث وقوع أحدهما على
و يكون : ل (ٲ ∪ ب) = $\frac{\text{ن (ٲ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$



مثـــــال

: ل (ٲ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (ٲ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٩}{١٠}$ = ٠,٩

و يمكن حساب الاتحاد بالعلاقة التالية

ل (ٲ∪ب) = ل (ٲ) + ل (ب) - ل (ٲ∩ب) = ٠و٥+ ٠و٦ ــ ٠و٢ = ٠و٩

مثــال١ : إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما و كان ل (ٲ) =٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (ٲ ∪ ب) = ٠,٩ أوجد ل (ٲ ∩ ب)

الحـــــــل

ل (ٲ ∩ ب)= ل (ٲ) + ل (ب) – ل (ٲ ∪ ب) = ٠,٤ + ٠,٧ ــ ٠,٩ = ٠,٢

مثـ٢ـال : إذا كان م ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما و كان :
ل(م) = ٠,٤٣ ، ل(ب) = ٠,٣٢ ، ل(م ∩ ب) = ٠,٣ أوجد : ل (م ∪ ب)

الحـــــــــل

∵ ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب) – ل (م ∩ ب)

∴ ل (م ∪ ب) = ٠,٤٣ + ٠,٣٢ – ٠.٣ = ٠.٤٥

مثـ٣ـال : صندوق به ١٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٠ خلطت و سحبت بطاقة عشوائياً أوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً :
[١] يقبل القسمة على ٢ [٢] يقبل القسمة على ٣
[٣] يقبل القسمة على ٢ و يقبل القسمة ٣

الحـــــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } ، ن (ف) = ١٠

[١] بفرض أن الحدث (م) هو أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٢

∴ الحدث (م) = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ، ن (م) = ٥

∴ ل (م) = $\frac{ن (م)}{ن (ف)}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

[٢] بفرض أن الحدث (ب)هو أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على٣

∴ الحدث (ب) = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ، ن (ب) = ٣

∴ ل (ب) = $\frac{ن (ب)}{ن (ف)}$ = $\frac{٣}{١٠}$

[٣] إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٢ و يقبل القسمة٣

= إحتمال وقوع م و ب معاً = { ٦ } ، ن (م ∩ ب) = ١

ل (م ∩ ب) = $\frac{ن (م ∩ ب)}{ن (ف)}$ = $\frac{١}{١٠}$

مثـ٣ـال : إذا كان م ، ب حدثين من ف وكان ل (م) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٦
، ل (م ∩ ب) = ٠,٣ أوجد ل (م ∪ ب)

الحـــــــــل

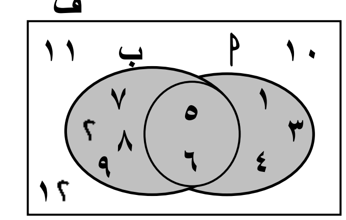
ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب) – ل (م ∩ ب)= ٠,٥ + ٠,٦ – ٠,٣ = ٠,٨

مثــ٤ــال : صندوق يحتوى على ٧ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٧ . عند سحب بطاقة واحدة عشوائياً فإن

احتمال الحدث ﻡ سحب بطاقة تحمل عدداً زوجياً = ل (ﻡ) = $\frac{\text{ن (ﻡ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٣}{٧}$

احتمال الحدث ب سحب بطاقة تحمل عدداً فردياً = ل (ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٤}{٧}$

مثــ٥ــال : من الشكل المقابل أحسب إحتمال :



[١] ل (ﻡ) [٢] ل (ب)

[٣] ل (ﻡ ∩ ب) [٣] ل (ﻡ ∪ ب)

الحـــــــل

من الشكل نجد : ن (ف) = ١٢ ، ن (ﻡ) = ٥

، ن (ب) = ٦ ، ن (ﻡ ∩ ب) = ٢ ، ن (ﻡ ∪ ب) = ٩

∴ [١] ل (ﻡ) = $\frac{٥}{١٢}$ ، [٢] ل (ب) = $\frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

[٣] ل (ﻡ ∩ ب) = $\frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$ ، [٤] ل (ﻡ ∪ ب) = $\frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

ملاحظة : ل (ﻡ) + ل (ب) – ل (ﻡ ∩ ب)

= $\frac{٥}{١٢} + \frac{٦}{١٢} - \frac{٢}{١٢} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ = ل (ﻡ ∪ ب)

أى أن : ل (ﻡ ∪ ب) = ل (ﻡ) + ل (ب) – ل (ﻡ ∩ ب)

مثــ٦ــال : صندوق يحتوى على ١٠ بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠ . عند سحب بطاقة واحدة عشوائياً فإن

الحدث ﻡ سحب بطاقة تحمل عدداً أولياً = { ٢ , ٣ , ٥ , ٧ }

احتمال الحدث ﻡ = $\frac{٤}{١٠}$ = ٠,٤

الحدث ب وهو سحب بطاقة تحمل عدداً غير أولياً = { ١ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

احتمال عدم وقوع الحدث ب = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

تدريب : من الشكل المقابل أوجد :

[١] ل(ﻡ ∩ ب) [٢] ل(ﻡ ∩ حـ)

[٣] ل(ب ∩ حـ) [٤] ل (ﻡ ∪ ب)

الأحداث المتنافية :



* يقال أن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا كان : أ ∩ ب = ∅
* و يقال لعدة أحداث أنها أحداث متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى
* لاحظ من الشكل المقابل : إذا كان : أ ، ب متنافيان فإن :

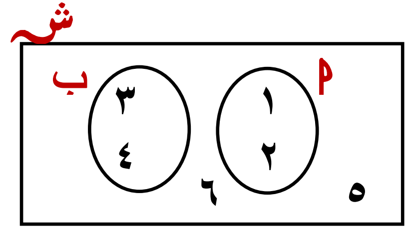
ل(أ ∩ ب) = ن (∅) / ن (ف) = صفر / ن (ف) = صفر

* لاحظ من الشكل المقابل : إذا كان : أ ، ب متنافيان فإن :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ل (أ) + ل (ب) − صفر

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)



مثـال : فى الشكل المقابل إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فإن

إحتمال [١] ل (أ ∩ ب) [٢] ل (أ ∪ ب)

(أ∩ب) = ∅ ∴ ل (أ∩ب) = صفر

(أ∪ب) = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ∴ ل (أ∪ب) = ٤/٦ = ٢/٣

ملاحظة : ل (أ∪ب) = ل (أ) + ل (ب)

الأحتواء :



* **ملاحظة :** إذا كان : أ ⊂ ب فإن :

❖ أ ∩ ب = أ ، و يكون : ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

❖ أ ∪ ب = ب ، و يكون : ل (أ ∪ ب) = ل (ب)



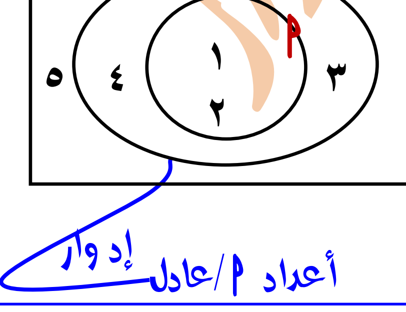
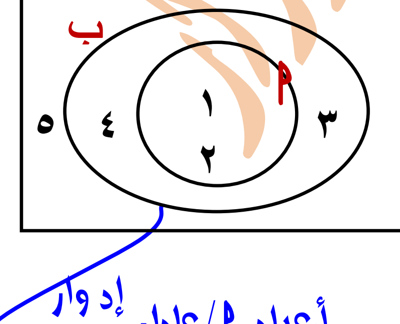
مثـال : إذا كان أ⊂ ب فإن

ل (أ∩ب) = ل (أ) ، ل (أ∪ب) = ل (ب)

أ = { ١ , ٢ } ، ب = { ١ , ٢ , ٣ , ٤ }

أ∩ب = { ١ , ٢ } ⇐ ل (أ∩ب) = ٢/٥

أ∪ب = { ١ , ٢ , ٣ , ٤ } ⇐ ل (أ∪ب) = ٤/٥

مثـ٦٧ـال : إذا كان ﻡ ، ب حدثان متنافيان ، ل (ﻡ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٣ أوجد ل (ﻡ ∪ ب)

الحـــــــــل

ﻡ ، ب حدثان متنافيان فإن ل (ﻡ ∩ ب) = صفر

∴ ل (ﻡ ∪ ب) = ل (ﻡ) + ل (ب) = ٠,٥ + ٠,٣ = ٠,٨

مثـ٨ـال : إذا كان ﻡ ، ب حدثين من ف ، ل(ﻡ) = $\frac{٣}{٥}$ ؛ ل(ﻡ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$

أوجد ل(ب) إذا كان : [١] ﻡ ، ب حدثين متنافيين [٢] ﻡ ⊂ ب

الحـــــــــل

[١] ∵ ﻡ ، ب حدثين متنافيين

∴ ل (ﻡ ∪ ب) = ل (ﻡ) + ل (ب)

∴ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٣}{٥}$ + ل (ب)

∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

[٢] ∵ ﻡ ⊂ ب ∴ ل (ﻡ ∪ ب) = ل (ب) ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$

مثـ٩ـال : إذا كان ﻡ ، ب حدثين من ف حيث ﻡ ⊂ ب ، ل (ﻡ) = ٠,٥ وأحتمال وقوع ب فقط = ٠,٣ أوجد أحتمال عدم وقوع ب

الحـــــــــل

∵ ﻡ ⊂ ب ∴ ل (ﻡ ∩ ب) = ل (ﻡ) = ٠,٥

∵ ل(ب − ﻡ) = ٠,٣ ∵ ل(ب) − ل (ﻡ ∩ ب) = ٠,٣

∴ ل(ب) − ٠,٥ = ٠,٣ ∴ ل(ب) = ٠,٣ + ٠,٥ = ٠,٨

أحتمال عدم وقوع ب ∴ ل(ب′) = ١ − ل (ب) = ١ − ٠,٨ = ٠.٢

مثـ١٠ـال :حدثان متنافيان وأحتمال وقوع أحدهما ضعف أحتمال وقوع الاخر وأحتمال وقوع واحد فيهما على الاقل ٠,٦ أوجد أحتمال وقوع كلا منهما .

الحـــــــــل

ل (س ∩ ص) = صفر ، ل(س) = ك ، ل(ص) = ٢ك

∵ ل (س ∪ ص) = ٠,٦ ∴ ل(س) + ل(ص) = ٠,٦

ك + ٢ ك = ٠,٦ ⟸ ٣ك = ٠,٦ ∴ ك = ٠,٢

∴ ل(س) = ٠,٢ ∴ ل(ص) = ٠,٤

مثـــ١١ــال : إذا كان س ، ص حدثين من ف بحيث ل(س) = ٠,٥ ، ل(س ∪ ص) = ٠,٨
أوجد ل(ص) التى تحقق أن
(١) س ، ص متنافيان (٢) س ⊃ ص (٣) ل(س ∩ ص) = ٠,٣

الحــــــــــــل

[١] س ، ص متنافيان ∴ ل(س ∩ ص) = صفر

∵ ل(س ∪ ص) = ٠,٨ ∴ ل(س) + ل(ص) = ٠,٨

٠,٥ + ل(ص) = ٠,٨ ∴ ل(ص)=٠,٣

[٢] س ⊃ ص ∴ ل(س ∩ ص) = ل(س)

ل(س ∩ ص) = ل(ص) = ٠,٨

[٣] ∵ ل(س ∩ ص) = ٠,٣ ، ل(س ∪ ص) = ٠,٨

∴ ل(س) + ل(ص) – ل(س ∩ ص) =

٠,٥ + ل(ص) – ٠,٣ = ٠,٨ ∴ ل(ص) = ٠,٨ +٠,٣ – ٠,٥ = ٠,٦

مثـــ١٢ــال : يتسابق ثلاث طلاب ﺃ ، ب ، جـ فى مسابقة للسباحة فإذا كان احتمال فوز (ﺃ) يساوى احتمال فوز (ب) واحتمال فوز (جـ) يساوى نصف أحتمال فوز (ﺃ)
أوجد احتمال فوز ب أو جـ علما بأن واحد فقط سوف يفوز بالمسابقة.

الحــــــــــــل

ل(ﺃ) = ٢س ، ل(ب) = ٢س ، ل(جـ) = س ف = { ﺃ ، ب ، جـ }

∴ ل (ﺃ) + ل (ب) + ل (جـ) = ١

٢س + ٢س + س = ١ ٥س = ١ ∴ س = $\frac{١}{٥}$

∴ ل(ﺃ) = ٢س = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(ب)=٢س = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(جـ) = س= $\frac{١}{٥}$

∴ ل(ب ∪ جـ) = ل(ب) + ل(جـ) = $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

مثـــ١٣ـــال :يتسابق ثلاث طلاب ٲ ، ب ، جـ فى مسابقة للسباحة فإذا كان احتمال فوز(ٲ) يساوى ضعف احتمال فوز (ب) واحتمال فوز (جـ) يساوى نصف أحتمال فوز (ب) أوجد احتمال فوز (ٲ) أو جـ علما بأن واحد فقط سوف يفوز بالمسابقة.

الحـــــــــل

∵ ل(ٲ) = ٤س ، ل(ب) = ٢س ، ل(جـ) = س ، ف = { ٲ ، ب ، جـ }

∴ ل(ٲ)+ ل(ب) + ل(جـ) = ١

∴ ٤ س + ٢س + س = ١ ⟸ ٧س = ١ ∴ س = $\frac{١}{٧}$

∴ ل(ٲ) = ٤س = $\frac{٤}{٧}$ ل(ب)= ٢س = $\frac{٢}{٧}$ ل(جـ) = س = $\frac{١}{٧}$

∴ ل(ٲ ∪ جـ) = ل (ٲ) + ل (جـ) = $\frac{٤}{٧}$ + $\frac{١}{٧}$ = $\frac{٥}{٧}$

مثـــ١٤ـــال : سلة بها ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ الى ٣٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائيا أوجد فضاء العينة ثم عين احتمال كلا من الاحداث الاتية

(١) ٲ = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٥

(٢) ب = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤

(٣) جـ = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤ ، ٥

(٤) ء = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤ أو ٥

الحـــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ٣٠ }

[١] ٲ = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٥

ٲ = { ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ } ∴ ل(ٲ) = $\frac{٦}{٣٠}$ = $\frac{١}{٥}$

[٢] ب = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤

ب = { ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ٢٨ } ∴ ل(جـ) = $\frac{٧}{٣٠}$

[٣] جـ = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤ ، ٥ معا

جـ = { ٢٠ } ∴ ل (جـ) = $\frac{١}{٣٠}$

[٤] ء = حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٤ أو ٥

ء = { ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ٢٨ ، ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٠}

∴ ل (ء) = $\frac{١٢}{٣٠}$ = $\frac{٦}{١٥}$

مثــ١٥ــال : صمم حجر نرد بحيث يكون أحتمال ظهور أى عدد يكون متناسبا مع هذا العدد أوجد أحتمال ظهور عدد فردى

الحـــــــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ل(١) = س ، ل(٢) = ٢س ، ل(٣) = ٣س

ل(٤) = ٤س ، ل(٥)=٥س ، ل(٦) = ٦س

∴ س + ٢س + ٣س + ٤س + ٥س + ٦س = ١ ٢١س = ١ س = $\frac{١}{٢١}$

ل(١) = $\frac{١}{٢١}$ ل(٢) = $\frac{٢}{٢١}$ ل(٣) = $\frac{٣}{٢١}$

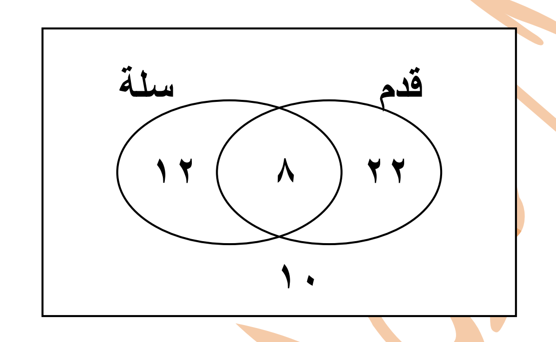
ل(٤) = $\frac{٤}{٢١}$ ل(٥) = $\frac{٥}{٢١}$ ل(٦) = $\frac{٦}{٢١}$

حدث ظهور عدد فردى { ١ ، ٣ ، ٥ }

= ل(١) + ل(٣) + ل(٥) = $\frac{١}{٢١}$ + $\frac{٣}{٢١}$ + $\frac{٥}{٢١}$ = $\frac{٩}{٢١}$

مثــ١٦ــال : فصل دراسى به ٥٢ طالب منهم ٣٠ طالب يلعبون كرة القدم ، ٢٠ طالب يلعبون كرة السلة ٨ طلاب يلعبون اللعبتين معا فإذا أختير طالب واحد عشوائيا أوجد أحتمال أن يكون الطالب المختار

الحـــــــــــل



(١) ممن يلعبون كرة القدم = $\frac{٣٠}{٥٢}$

(٢) ممن يلعبون كرة السلة = $\frac{٢٠}{٥٢}$

(٣) ممن يلعبون القدم فقط = $\frac{٢٢}{٥٢}$

(٤) ممن يلعبون السلة فقط = $\frac{١٢}{٥٢}$

(٥) ممن لا يلعبون القدم = $\frac{٢٢}{٥٢}$

(٦) ممن يلعبون أحد اللعبتين على الاقل = $\frac{٤٢}{٥٢}$ (٧) ممن يلعبون اللعبتين معا = $\frac{٨}{٥٢}$

(٨) ممن يلعبون أحد اللعبتين فقط = $\frac{٣٤}{٥٢}$ (٩) ممن لا يلعبون السلة = $\frac{٣٢}{٥٢}$

(١٠) ممن يلعبون أحدى اللعبتين على الاكثر = $\frac{٤٤}{٥٢}$

(١١) ممن لا يلعبون أيا من اللعبتين = $\frac{١٠}{٥٢}$

مثـ١٧ـال : صمم حجر نرد بحيث أحتمال ظهور أى عدد فردى ضعف أحتمال ظهور أى عدد زوجى أوجد أحتمال ظهور عدد أولى

الحـــــــــــل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

ل(٢) = ل(٤) = ل(٦) = س ، ل(١) = ل(٣) = ل(٥) = ٢ س

ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤) + ل(٥) + ل(٦) =١

٢س + س + ٢ س + س + ٢ س + س = ١

٩س = ١ س= $\frac{١}{٩}$

ل(٢) = ل(٤) = ل(٦) = $\frac{١}{٩}$ ، ل(١) = ل(٣) = ل(٥) = $\frac{٢}{٩}$

أحتمال ظهور عدد أولى {٢ ، ٣ ، ٥}

= ل (٢) + ل (٣) + ل (٥) = $\frac{١}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ $\frac{٥}{٩}$

تمـــارين

[١] إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيان وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ فإن ل (ب) =

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ∅

[٢] إذا كان أ ⊂ ب و كان ل (أ) = ٢٥٪ ، ل (ب) = ٥٥٪ فإن ل (أ ∪ ب) =........

(أ) ٢٥٪ (ب) ٣٥٪ (ج) ٥٥٪ (د) ٩٠٪

[٣] كان ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١٥ فإن ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٨٥ (ب) ٠,٤٥ (ج) ٠,٢٥ (د) ١

[٤] كان ل (أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ فإن ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) صفر

[٥] إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

[٢] إذا كان ؍ ، ب حدثين من ف ، ل(؍) = $\frac{١}{٤}$ ؛ ل(؍ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$
أوجد ل(ب) إذا كان : (١) ؍ ، ب حدثين متنافيين (٢) ؍ ⊂ ب

[٣] إذا كان ؍ ، ب حدثين من ف ، ل(؍) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٧ ،
ل(؍ ∩ ب) = ٠,٤ أوجد إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

[٤] إذا كان ؍ ، ب حدثين من ف ، ل(؍) = $\frac{١}{٤}$ ، ل(ب) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل(؍ ∪ ب) = $\frac{١}{٨}$
أوجد إحتمال وقوع الحدثين معاً

[٥] إذا كان ؍ ، ب حدثين من ف ، ل(؍) = $\frac{١}{٥}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد ل(؍ ∪ ب) فى
الحالات التالية : (١) ل(؍ ∩ ب) = $\frac{١}{٢٠}$ (٢) ؍ ، ب حدثين متنافيين

[٦] إذا كان ؍ ، ب حدثين من ف ، ل(؍) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٨ ، ل(؍ ∪ ب) = ٠,٧
أوجد ل(؍ ∩ ب)

[٧] لوحة دوارة مقسمة إلى ٧ أقسام متساوية مدون عليها الأرقام من ١ إلى ٧ ، إذا كان
؍ حدث توقف المؤشر عند عدد زوجى ، ب حدث توقف المؤشر عند عدد زوجى ، حـ
حدث توقف المؤشر عند عدد يقبل القسمة على ٢

أوجد : ل(؍ ∩ ب) ، ل(؍ ∩ حـ) ، ل(ب ∩ حـ)

[٨] ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة و كان ؍ هو حدث ظهور عدد زوجى على الوجه
الظاهر، ب هو حدث ظهور عدد أكبر من ٣ على الوجه الظاهر أوجد ل(؍ ∪ ب)

[٩] يصوب لاعبان ؍ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان إحتمال أن يصيب اللاعب ؍
الهدف هو $\frac{٢}{٥}$ ، إحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف هو $\frac{١}{٤}$ ، إحتمال أن يصيب
اللاعبان الهدف معا هو $\frac{١}{٦}$ أوجد إحتمال أن إصابة الهدف من أحد اللاعبين على الأقل

[١٠] فصل دراسى به ٤٠ طالبا نجح منهم ١٧ طالبا فى إمتحان العلوم ، ٢٠ طالبا فى
إمتحان الرياضيات ،٥ طلاب منهم فى الامتحانين معا أختير طالب منهم عشوائيا أوجد
إحتمال أن يكون الطالب المختار: (١) ناجحا فى العلوم
(٢) ناجحا فى الرياضيات (٣) ناجحا فى كلا الامتحانين



[١١] أشترك ثلاثة لاعبين م ، ب ، جـ فى إحدى السباقات فإذا كان إحتمال فوز م = $\frac{١}{٢}$ إحتمال فوز ب ، إحتمال فوز م = ٢ إحتمال فوز جـ أوجد إحتمال فوز م أو جـ علما بأن واحد فقط هو الفائز

[١٢] أشترك ثلاثة لاعبين م ، ب ، جـ فى إحدى السباقات فإذا كان إحتمال فوز م = ضعف إحتمال فوز ب ، إحتمال فوز ب = إحتمال فوز جـ أوجد إحتمال فورب أو جـ علما بأن واحد فقط هو الفائز

[١٣] صمم حجر نرد بحيث عند إلقائه يكون إحتمال ظهور كل من الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ متساو ، إحتمال ظهور العدد ٦ يساوى ثلاثة أمثال إحتمال ظهور العدد ١ أوجد إحتمال ظهور عدد زوجى

[١٤] سحبت بطاقة من بين ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلي ٣٠ اوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً :[١] يقبل القسمة علي ٣ [٢] يقبل القسمة علي ٥
[٣] يقبل القسمة علي ٣ و يقبل القسمة على ٥
[٤] يقبل القسمة علي ٣ أو يقبل القسمة على ٥

[١٥] سحبت بطاقة من بين ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلي ٣٠ اوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً : [١] زوجيا ويقبل القسمة علي ٥
[٢] يقبل القسمة علي ٣ أو ٥

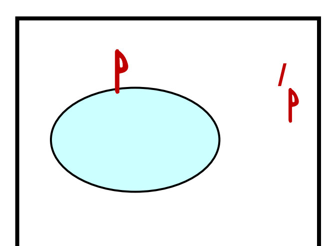
[١٦] فصل دراسى به ٤٨ طالب نجح منهم ٣٠ طالب فى التاريخ ، ٢٠ طالب فى الفلسفة ٧ طلاب فى المادتين معا فإذا أختير طالب واحد عشوائيا من هذا الفصل أوجد احتمال ان يكون الطالب المختار

(١) ناجحا فى التاريخ
(٢) ناجحا فى الفلسفة
(٣) ناجحا فى المادتين معا
(٤) ناجحا فى أحد المادتين على الاقل
(٥) ناجحا فى التاريخ فقط
(٦) ناجحا فى أحد المادتين فقط
(٧) ناجحا فى أحد المادتين على الاكثر
(٨) راسبا فى التاريخ
(٩) راسبا فى الفلسفة
(١٠) راسبا فى المادتين معا

الحدث المكمل و الفرق بين حدثين

الحدث المكمل

[١] فى الشكل المقابل :



إذا كانت ف المجموعة الشاملة ، أ ⊂ ف فإن :

مكملة المجموعة أ هى أ/ (عدم وقوع الحدث أ)

و يكون : أ ∩ أ/ = ∅ ، أ ∪ أ/ = ف

فمثلاً :

إذا كانت : ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، أ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ }

فإن : أ/ = { ٣ ، ٥ }

و بالتالى يكون : ل(أ) = $\frac{٤}{٦}$ ، ل(أ/) = $\frac{٢}{٦}$

و يلاحظ أن : ل(أ) + ل(أ/) = $\frac{٤}{٦}$ + $\frac{٢}{٦}$ = ١

الحدث المكمل :

الحدث المكمل للحدث أ هو أ/ و هو حدث عدم وقوع أ

أى أن : إذا كان أ ⊂ ف فإن : أ/ هو الحدث المكل للحدث أ

حيث : أ ∩ أ/ = ∅ ، أ ∪ أ/ = ف

و يلاحظ أن : الحث و الحث المكمل له هما حدثان متنافيان

ويكون : ل(أ) = ١ − ل(أ/) ، ل(أ/) = ١ − ل(أ)

مثـ١ـال : صندوق يحتوى على ١٠ بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠ . عند سحب بطاقة واحدة عشوائياً أوجد احتمال الحدث سحب بطاقة

[١] تحمل عدداً أولياً [٢] تحمل عدداً غير أولياً

الحــــــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، ١٠ } ن (ف) = ١٠

[١] حدث أ سحب بطاقة تحمل عدداً أولياً = { ٢ , ٣ , ٥ , ٧ } ⇐ ن (أ) = ٤

∴ ل (أ) = $\frac{ن (أ)}{ن (ف)}$ = $\frac{٤}{١٠}$ = ٠,٤

[٢] حدث ب سحب بطاقة تحمل عدداً غير أولياً = { ١ ، ٦، ٤ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

ن (أ/) = ١٠ ـ ٤ = ٦ ∴ ل (أ̄) = $\frac{ن (أ̄)}{ن (ف)}$ = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

و هنا نلاحظ أن

❖ $أ \cap \bar{أ}$ = {٢ , ٣ , ٥ , ٧} $\cap$ {١ , ٤ , ٦ , ٨ , ٩ , ١٠} = $\emptyset$

الحدث والحدث المكمل له حدثان متنافيان $أ \cap \bar{أ} = \emptyset$, ل$(أ \cap \bar{أ})$ = صفر

$أ \cup \bar{أ}$ = ف , ل$(أ \cup \bar{أ})$ = ١

$أ \cup \bar{أ}$ = {٢ , ٣ , ٥ , ٧} $\cup$ {١ , ٤ , ٦ , ٨ , ٩ , ١٠}

= {١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ٦ , ٧ , ٨ , ٩ , ١٠} = ف

ل (أ) + ل ($\bar{أ}$) = ٠,٤ + ٠,٦ = ١

ل (أ) = ١ ـ ل ($\bar{أ}$) = ١ ـ ٠,٦ = ٠,٤ ، ل ($\bar{أ}$) = ١ ـ ل (أ) = ١ ـ ٠,٤ = ٠,٦

مثـــال ٢ : إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤

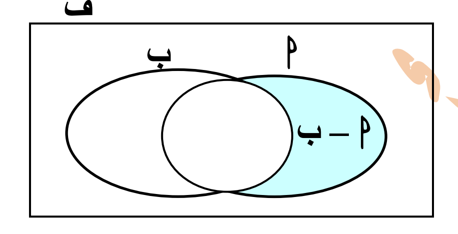
أوجد : ل(أ/) ، ل(ب/)

الحـــــــل

ل(أ/) = ١ – ل(أ) = ١ – ٠,٧ = ٠,٣

ل(ب/) = ١ – ل(ب) = ١ – ٠,٤ = ٠,٦

الفرق بين حدثين فى الشكل المقابل :



إذا كانت ف المجموعة الشاملة ، أ ، ب $\subset$ ف

فإن : الجزء المظلل يرمز له بالرمز " أ – ب "

(و يقرأ أ فرق ب)

فمثلاً : إذا كانت : ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

، أ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ب = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ }

فإن : أ – ب = { ٣ ، ٦ } و يكون : ل (أ – ب) = $\frac{٢}{٦}$

❖ إذا كان أ ، ب حدثين من ف فإن : أ – ب

هو حدث وقوع أ و عدم وقوع ب أى حدث وقوع أ فقط

لاحظ أن : (أ – ب) $\cup$ (أ $\cap$ ب) = أ

و بالتالى يكون : ل (أ – ب) + ل (أ $\cap$ ب) = ل (أ)

أى أن : ل (أ – ب) = ل (أ) – ل (أ $\cap$ ب)

مثـــ٣ـــال : إذا كان ٩ ، ب حدثين من ف ، ل(٩) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(٩ ∩ ب) = ٠,٤ أوجد : ل (٩ – ب) ، ل (ب – ٩)

الحـــــــــل

ل (٩ – ب) = ل (٩) – ل (٩ ∩ ب) = ٠,٦ – ٠,٤ = ٠,٢

ل (ب – ٩) = ل (ب) – ل (٩ ∩ ب) = ٠,٧ – ٠,٤ = ٠,٣

مثـــ٤ـــال : إذا كان ٩ ، ب حدثين من ف ، ل(٩) = ٠,٧ ، (٩ – ب) = ٠,٣ أوجد : ل (٩ ∩ ب)

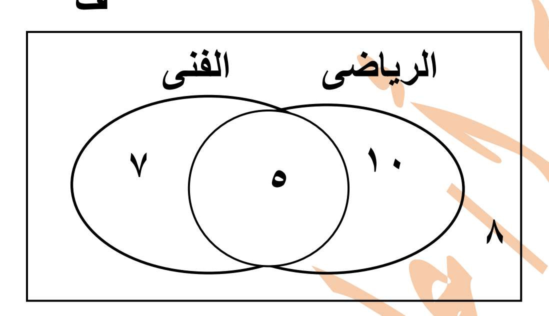
الحـــــــــل

∵ ل (٩ – ب) = ل (٩) – ل (٩ ∩ ب)

∴ ٠,٣ = ٠,٧ – ل (٩ ∩ ب)

∴ ل (٩ ∩ ب) = ٠,٧ – ٠,٣ = ٠,٤

مثـــ٤ـــال : فصل دراسى به ٣٠ طالبا منهم ١٥ طالب يمارسون النشاط الرياضى ؛ ١٢ طالبا يمارسون النشاط الفنى ، ٥ يمارسون النشاطين معا اختير منهم طالب عشوائيا مثل ذلك بشكل فن ثم أوجد إحتمال أن يكون الطالب المختار



[١] يمارس النشاط الرياضى فقط
[٢] لا يمارس النشاط الفنى
[٣] لا يمارس النشاطين معاً
[٤] يمارس كلا النشاطين
[٥] لا يمارس أى نشاط

الحـــــــــل

من الشكل المقابل :

[١] إحتمال أن يكون الطالب المختار يمارس النشاط الرياضى فقط $= \frac{١٠}{٣٠} = \frac{١}{٣}$

[٢] إحتمال أن يكون الطالب المختار لا يمارس النشاط الفنى $= \frac{٢٣}{٣٠}$

[٣] إحتمال أن يكون الطالب المختار لا يمارس النشاطين معاً $= \frac{٢٥}{٣٠} = \frac{٥}{٦}$

[٤] إحتمال أن يكون الطالب المختار يمارس كلا النشاطين $= \frac{٢٢}{٣٠} = \frac{١١}{١٥}$

[٥] إحتمال أن يكون الطالب المختار لا يمارس أى نشاط $= \frac{٨}{٣٠} = \frac{٤}{١٥}$

تمـــــارين

[١] إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

[١] إذا كان ل (أ) = ل (أَ) فإن ل (أ) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ∅

[٢] إذا كان ل (أ) = ٤ ل (أَ) فإن ل (أ) = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٥}$

[٣] إذا كان ل (أ∩ب) = ٠,٣ فإن ل (أ∩ب)َ = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٧ (د) ١

[٤] إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٦٥ ٪ فإن احتمال عدم وقوع أ هو ....

(أ) ٠,٣٥ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٠,٦٥ (د) ١

[٥] إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال عدم ظهور عدد أكبر من ٤ هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

[٦] إذا كان ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥ ، أ⊂ب فإن ل (أ∩ب) = ...

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٨

[٢] أكمل ما يلى :

[١] إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

[٢] إذا كان : إحتمال وقوع الحدث أ هو ٤٠ ٪ فإن : إحتمال عدم وقوعه = ...

[٣] إذا كان : ل(أ) = ل(أَ) فإن : ل(أ) = ...

[٤] إذا كان : أ ⊂ ب فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

[٥] إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان ، و كان : ل(أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإن : ل (ب) = ...

[٦] إذا كان : أ ، ب حدثين من ف ، و كان : ل(أ) = ٠,٨ ، ل (أ − ب) = ٠,٣ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(٣) إذا كان ٢ ، ب حدثين من ف ، ل(٢) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(٢ ∩ ب) = ٠,٣

أوجد : ل(ب/) ، ل (٢ – ب)

(٤) إذا كان ٢ ، ب حدثين من ف ، ل (٢/) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(٢ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$

أوجد : ل(٢) ، ل(٢ ∪ ب) ، ل (٢ – ب) ،

ل (ب – ٢) ، ل (٢ ∩ ب)/

(٥) إذا كان ٢ ، ب حدثين من ف ، ل(٢/) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٨ ، ل(٢ – ب) = ٠,١

أوجد ل(٢) ، ل(٢ ∪ ب) ، ل (٢ ∪ ب)/ ، ل (٢ – ب)

(٦) إذا كان ٢ ، ب حدثين من ف ، ل(٢/) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(٢ ∩ ب) = ٠,٦

أوجد [١] إحتمال عدم وقوع الحدثين معاً

[٢] إحتمال وقوع الحدث ٢ فقط

[٣] إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

(٧) تقدم ٥٠ شخصاً لشغل إحدى الوظائف فوجد أن ٣٥ منهم يجيدون اللغة الإنجليزية ، ٢٠ منهم يجيدون اللغة الفرنسية ، ١٥ منهم يجيدون اللغتين معا أختير شخص منهم عشوائيا مثل ذلك بشكل فن ثم أوجد إحتمال أن يكون هذا الشخص :

[١] يجيد الإنجليزية فقط [٢] لا يجيد الفرنسية [٣] يجيد إحدى اللغتين على الأقل

(٨) فى دراسة إحصائية لمشاهدة أحد البرامج الثقافية فى التلفاز وجد أن إحتمال أن يشاهد زوج وزوجته معاً البرنامج هو ٠,٣٥ ، إحتمال أن يشاهد الزوج البرنامج هو ٠,٤ ، إحتمال أن تشاهد الزوجة البرنامج هو ٠,٥ مثل ذلك بشكل فن ثم أوجد إحتمال أن :

[١] تشاهد الزوجة فقط البرنامج [٢] لا يشاهد الزوج البرنامج

[٣] كلاهما يشاهدان البرنامج

(٩) كيس يحتوى على ٨ كرات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٨ ، ٦ كرات حمراء مرقمة من ٩ إلى ١٤ سحبت كرة عشوائيا منه أوجد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

[١] بيضاء أو تحمل رقماً فردياً [٢] حمراء و تحمل رقماً زوجياً



(١) تعاريف ومفاهيم أساسية

(٢) أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة

(٣) تعيين الدائرة

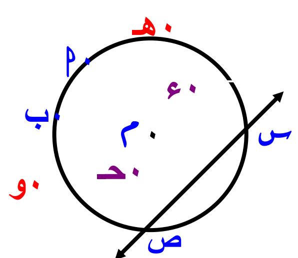
(٤) علاقة أوتار الدائرة بمركزها

مفاهيم و تعاريف أساسية

(١) الدائرة :

هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة من المستوى تسمى مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة يرمز للدائرة عادة بمركزها فنقول الدائرة م لنعنى الدائرة التى نركزها النقطة م كما بالشكل المقابل

(٢) تجزئة المستوى بالدائرة :



عند رسم دائرة في المستوى فإنها تقسم نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط كما بالشكل المقابل و هى :

١ – مجموعة نقط الدائرة " على الدائرة " مثل : أ ، ب ، س ، ص ٠٠٠٠

٢ – مجموعة نقط تقع داخل الدائرة : مثل حـ ، ع ، ٠٠٠٠٠

٣ – مجموعة نقط تقع خارج الدائرة مثل : هـ ، و ، ٠٠٠٠

ملاحظات :

(١) سطح الدائرة هو : مجموعة نقط الدائرة $\cup$ مجموعة النقط داخل الدائرة

(٢) الفرق بين الدائرة وسطح الدائرة فمثلا :

$\overline{\text{س ص}}$ $\cap$ الدائرة = { س ، ص } بينما $\overline{\text{س ص}}$ $\cap$ سطح الدائرة = $\overline{\text{س ص}}$

مركز الدائرة م $\notin$ الدائرة بينما مركز الدائرة م $\in$ سطح الدائرة

(٣) نصف قطر الدائرة :

هو القطعة المستقيمة التى طرفاها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة

مثل : $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م حـ}}$

ملاحظات :

* م أ = م ب = م حـ = طول نصف قطر الدائرة " نق "

* تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما

(٤) الوتــر :

هو القطعة المستقيمة التى طرفاها " نهايتاها " أى نقطتين على الدائرة مثل : $\overline{\text{ب حـ}}$

(٥) القطر :

هو الوتر المار بمركز الدائرة مثل : $\overline{\text{أ حـ}}$

ويلاحظ : القطر هو أكبر الأوتار طولاً فى الدائرة

(٦) محيط الدائرة ومساحتها :

محيط الدائرة هو طول المنحنى المغلق الذى يمثل الدائرة .... محيط الدائرة = ٢ π نق

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

****

مثـ١ـال : في الشكل المقابل : إذا كان ق (∠ م ب حـ) = ٥٠° أوجد ق (∠ ب م حـ)

الحـــــــل

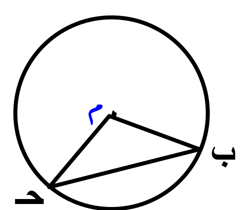


∵ م ب = م حـ = نق للدائرة م

∴ Δ م ب حـ متساوى الساقين

∴ ق (∠ م ب حـ) = ق (∠ م حـ ب) = ٥٠°

∴ ق (∠ ب م حـ) = ١٨٠° ـ ١٠٠° = ٨٠°

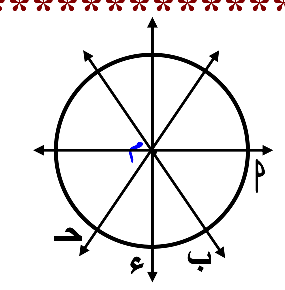


****

(٧) محور تماثل الدائرة :

هو أى مستقيم يمر بمركز الدائرة مثل : $\overleftrightarrow{\text{م ء}}$

ويلاحظ : الدائرة لها عدد لا نهائى من محاور التماثل



****

مثـ٢ـال : إثبت أن النقط ٳ=(٠ ، ١) ، ب=(١ ، ٢) ، جـ=(-٢ ، ٥) تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م=(-١ ، ٣) ثم أوجد مساحتها

الحـــــــل

م ٳ = $\sqrt{(١+٠)^{٢} + (٣ - ١)^{٢}}$ = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$

م ب = $\sqrt{(١+١)^{٢} + (٣ - ٢)^{٢}}$ = $\sqrt{٤+١}$ = $\sqrt{٥}$

م جـ = $\sqrt{(-١+٢)^{٢} + (٥-٣)^{٢}}$ = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$

طول نصف قطر الدائرة = $\sqrt{٥}$

مساحة الدائرة = ط نق^{٢} = ط × ٥ = ٥ط

****

مثـ٣ـال :إذا كانت النقط ٳ= (-٢ ، ١) تقع على محيط الدائرة التى مركزها (٢ ، ٤) أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة ثم بين ما إذا كانت النقطة ب (١ ، ٣) تقع على هذه أم لا

الحـــــــل

∵ ٲ تقع على محيط الدائرة م

∴ نق = م ٲ = $\sqrt{(٢+٢)^٢ + (٤ - ١)^٢}$ = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

لمعرفة موقع النقطة ب بالنسبة للدائرة نوجد ب م

∴ ب م = $\sqrt{(١+٢)^٢ + (٣ - ١)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ٤}$ = $\sqrt{١٣}$ ≠ نق

∴ ب لا تقع على محيط الدائرة

****

مثـــ٤ـال : إذا كان أ ب قطر فى دائرة مركزها م حيث ٲ = (-٥ ، -٣) ، ب = (١ ، ٥) أوجد

(أولا) مركز الدائرة (ثانيا) طول نصف قطر هذه الدائرة (ثالثا) محيط الدائرة

الحـــــــل

م = منتصف ٲ ب = ($\frac{-٥+١}{٢}$ ، $\frac{-٣+٥}{٢}$) = ($\frac{-٤}{٢}$ ، $\frac{٢}{٢}$) = (-٢ ، ١)

نق = م ٲ = $\sqrt{(-٢+٥)^٢ + (١+٣)^٢}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٢٥ = $\sqrt{٥}$ وحدات طولية

محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ ط × ٥ = ١٠ ط

****

نتائج هامة :

نتيجة (١)

المستقيم المار بمركز الدائرة و بمنتصف أى وتـــر فيها يكون عموديا على هذا الوتر

فى الشكل المقابل :

إذا كان : ٲ ب وتر فى الدائرة م ، حـ منتصف ٲ ب

فإن : م حـ ⊥ ٲ ب

نتيجة (٢)

المستقيم المار بمركز الدائرة عموديا على أى وتـــر فيها ينصف هذا الوتر

فى الشكل المقابل :

إذا كان: ٲ ب وتر فى الدائرة م

م حـ ⊥ ٲ ب

حيث حـ ∈ ٲ ب فإن :

حـ منتصف ٲ ب

نتيجة (٣)

المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز هذه الدائرة

فى الشكل المقابل :

إذا كان: ٲ ب وتر فى الدائرة م

، حـ منتصف ٲ ب

، المستقيم ل ⊥ ٲ ب من نقطة حـ فإن : م ∈ المستقيم ل

مثـــال ٥ : في الشكل المقابل:

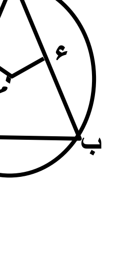
ء ، هـ منتصفى $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ؛ أ ب = أ حـ

فإذا كان ق (∠ أ ب حـ) = ٥٠° أوجد ق (∠ ء م هـ)

الحـــــل

المعطيات : ء ، هـ منتصفى $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ حـ}}$ ؛ أ ب = أ حـ ، ق (∠ م ب حـ) = ٥٠°

المطلوب : إيجاد ق (∠ ء م هـ)



البرهـــان : ∵ ∆ أ ب حـ فيه أ ب = أ حـ

∴ ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب) = ٥٠°

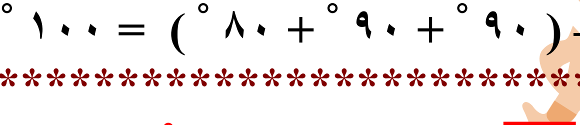
∴ ق (∠ ب أ حـ) = ٨٠°

∵ ء منصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق (∠ أ ء م) = ٩٠°

بالمثل ق (∠ أ هـ م) = ٩٠°

∵ أ ب حـ ء شكل رباعى

∴ ق (∠ ء م هـ) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ٨٠°) = ١٠٠°



****

مثـــال ٦ : فى الشكل المقابل إذا كان جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ق (∠م أ جـ) = ٥٠°

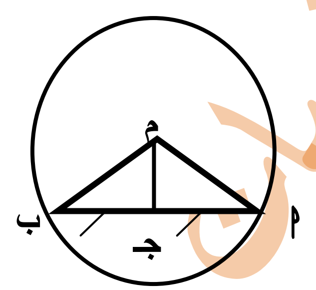
أوجد ق (∠م ب جـ)



الحـــــل

∵ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{م جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

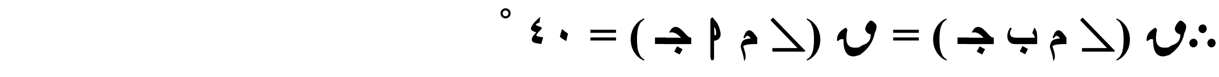
∴ ق (∠م جـ أ) = ٩٠°



ق (∠ م أ جـ) = ٩٠° – ٥٠° = ٤٠°

فى ∆ م أ ب ∴ م أ = م ب

∴ ق (∠ م ب جـ) = ق (∠ م أ جـ) = ٤٠°



****

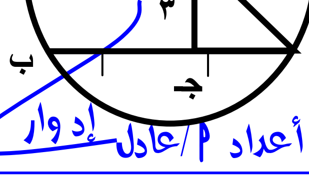


مثـــال ٧ : فى الشكل المقابل إذا كانت جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، م جـ = ٣سم

، نق = ٥سم أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

الحـــــل

∵ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق (∠ م جـ أ) = ٩٠°



∵ (أ جـ)^{٢} = (أ م)^{٢} - (م جـ)^{٢}=(٥)^{٢} – (٣)^{٢}

= ٢٥ – ٩ = ١٦

أ جـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم　　　　∴ أ ب = ٢ أ جـ = ٢ × ٤ = ٨ سم

****

مثـ٨ـال : فى الشكل المقابل إذا كانت جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، أ ب = ١٢سم ، م جـ = ٨سم　أوجد طول نصف قطر الدائرة



الحـــــــل



∵ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$　　∴ ق (∠ م جـ أ) = ٩٠

∵ (م أ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} +(م جـ)^{٢} = (٦)^{٢} + (٨)^{٢}

= ٣٦+٦٤ = ١٠٠

∴ أ م = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم　　　∴ نق = أ م = ١٠ سم

****

مثـ٩ـال : فى الشكل المقابل س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ق (∠أ) = ٧٠ °

أوجد : ق (∠س م ص) ، ق (∠س م ص) المنعكسة

الحـــــــل

∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$　　∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ق (∠م س أ) = ٩٠ °

∵ ص منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$　　∴ $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ ق (∠م ص أ) = ٩٠ °

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى = ٣٦٠ °

∴ق (∠س م ص) = ٣٦٠ ° – [٩٠ °+ ٩٠ °+ ٧٠ °]

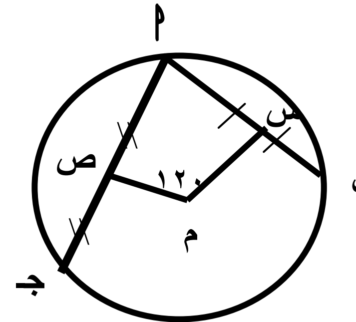
∴ق (∠س م ص) = ٣٦٠ ° – ٢٥٠ ° = ١١٠

∴ ق (∠س م ص)$_{\text{المنعكسة}}$ = ٣٦٠ ° – ق (∠س م ص) = ٣٦٠ ° – ١١٠ ° = ٢٥٠ °

****

مثـــال ١٠ : فى الشكل المقابل : س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ق (∠س أ ص) = ٦٠° ، ق (∠س م ص) = ١٢٠° إثبت أن : ص منتصف $\overline{أ جـ}$

الحـــــــــل



∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ ق (∠م س ص) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ق (∠م ص أ) = ٣٦٠° − [٦٠° + ١٢٠° + ٩٠°]

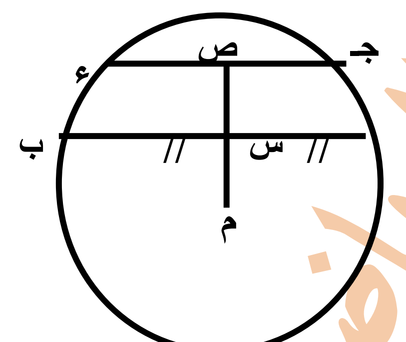
∴ ق (∠م ص أ) = ٣٦٠ - ٢٧٠ = ٩٠°

∵ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ∴ ص منتصف $\overline{أ جـ}$

****

مثـــال ١١ : فى الشكل المقابل : س منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ إثبت أن : ص منتصف $\overline{جـ ء}$

الحـــــــــل



∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

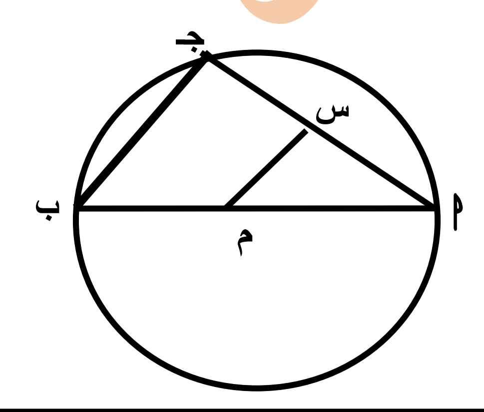
∴ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$ ∵ ص منتصف $\overline{جـ ء}$

****

مثـــال ١٢ : فى الشكل المقابل : $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

ب جـ = ١٠ سم أوجد طول $\overline{س م}$

الحـــــــــل



∵ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ∴ س منتصف $\overline{أ جـ}$

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ∴ م منتصف $\overline{أ ب}$



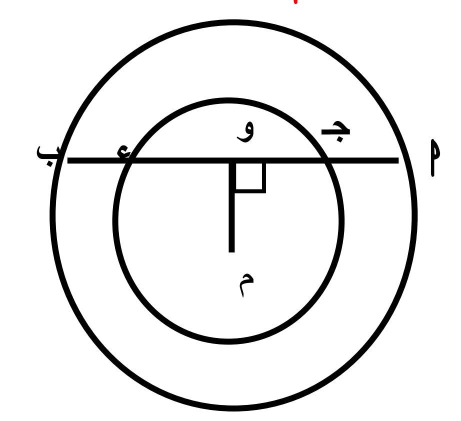
∵ س منتصف أ جـ ، ∴ م منتصف أ ب

∴ م س = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٥سم

طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث تساوى نصف طول الضلع الثالث

مثـــال ١٣ : فى الشكل المقابل دائرتان متحدتا المركز م ، ا ب وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء ، م و ⊥ جـ ء إثبت أن : ا جـ = ب ء

الحـــــــــل



فى الدائرة الصغرى

∵ م و ⊥ جـ ء ∴ جـ و = و ء (١)

فى الدائرة الكبرى

∵ م و ⊥ ا ب ∴ ا و = و ب (٢)

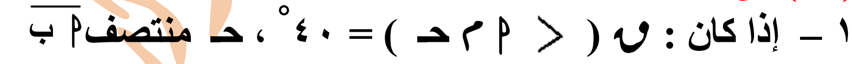
بطرح ١ من ٢ : ا و – جـ و = و ب – و ء

∴ ا جـ = ب ء

****

تمارين

(١) فى الأشكال التالية أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس حيث م مركز الدائرة



١ – إذا كان : ق (< ا م حـ) = ٤٠° ، حـ منتصف ا ب

فإن : ق (< م ا حـ) = ... ° [٤٠ ؛ ٤٥ ؛ ٥٠ ؛ ٩٠]

٢ – فى الشكل السابق : إذا كان : ا ب = ٨ سم ، م حـ = ٣ سم

فإن : نق = ... سم [٤ ؛ ٥ ؛ ٦ ؛ ٨]

٣ – إذا كان : ق (< ا م ب) = ٦٠° فإن : ق (< م ا ب) = ...°

[٤٠ ؛ ٣٠ ؛ ٦٠ ؛ ٩٠]

٤ – فى الشكل السابق : إذا كان : ا ب = ٦ سم فإن :

ا م = ... سم [٤ ؛ ٣ ؛ ٥ ؛ ٦]

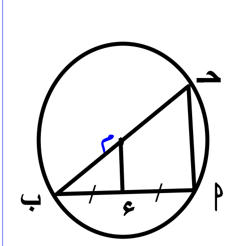
٥ – إذا كان : ء ، هـ منتصفى ا ب ؛ ا حـ ، ق (< ء م هـ) = ١١٠°

فإن : ق (< ء ا هـ) = ...° [١١٠ ؛ ٥٥ ؛ ٧٠ ؛ ٩٠]

(٢) فى الشكل المقابل : $\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، $\overline{ب حـ}$ قطر فيها ،

ق (∠ ب أ حـ) = ٩٠° ، ء منتصف $\overline{أب}$ ، أ حـ = ٥ سم ،

ق (∠ أ ب حـ) = ٣٠° أكمل ما يلى :



١ ـ م .... $\overline{ب حـ}$ ٢ ـ ء .... $\overline{أ حـ}$

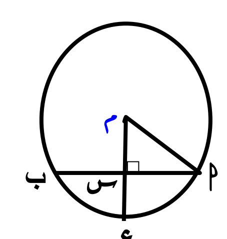
٣ ـ $\overline{م ء}$ .... $\overline{أ ب}$ ٤ ـ $\overline{م ء}$ .... $\overline{أ ب}$

٥ ـ أ حـ = ... سم ٦ ـ م ء = ... سم

(٣) فى الشكل المقابل : $\overline{أ ب}$ وتر في الدائرة م ، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم ، س ء = ٢ سم

أوجد طول $\overline{أ ب}$

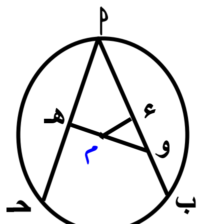


(٤) فى الشكل المقابل :

ء ، هـ منتصفى $\overline{أ ب}$، $\overline{أ حـ}$ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٤٥°

فإذا كان $\overline{م هـ}$ ∩ $\overline{أ ب}$ = { و }

أثبت أن المثلث م ء و متساوى الساقين

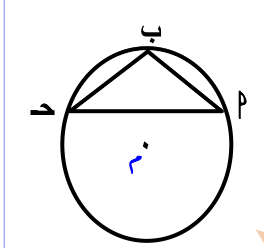


(٥) فى الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠°

، أ ب = أ حـ

أثبت أن : أ ب = ٦ سم ثم أوجد بعد م عن $\overline{أ حـ}$

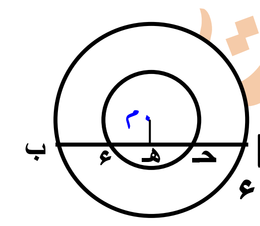


(٦) فى الشكل المقابل :

دائرتان متحدا المركز م ، طول نصفى قطريهما ١٣ سم ، ٢٠ سم ،

م هـ = ١٢ سم ،$\overline{أ ب}$ وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى في حـ ، ء

، $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ أوجد طول $\overline{ب ء}$



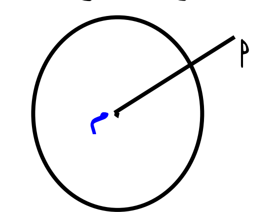
****



موضع نقطة بالنسبة لدائرة

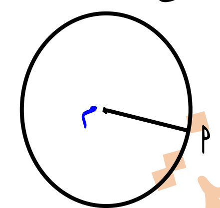
إذا كانت دائرة م ، طول نصف قطرها نق ، ٲ نقطة في مستوى الدائرة فإن :

ٲ تقع خارج الدائرة م



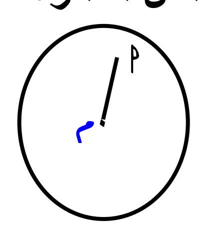
إذا كان : م ٲ > نق

ٲ تقع على الدائرة م



إذا كان : م ٲ = نق

ٲ تقع داخل الدائرة م



إذا كان : م ٲ < نق

****

مثــ١ــال : دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، ء نقطة في مستوى الدائرة عين موضع النقطة ء في الحالات التالية :

[١] م ء = ٦ سم　　[٢] م ء = ٩ سم　　[٣] م ء = ٧ سم

الحـــــــل

[١] ∵ نق = ٧ سم ، م ء = ٦ سم　∴ م ء < نق　∴ ء تقع داخل الدائرة

[٢] ∵ نق = ٧ سم ، م ء = ٩ سم　∴ م ء > نق　∴ ء تقع خارج الدائرة

[٣] ∵ نق = ٧ سم ، م ء = ٧ سم　∴ م ء = نق　∴ ء تقع على الدائرة

****

مثــ٢ــال : إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ، ٲ نقطة في مستوى الدائرة أوجد قيم س في الحالات التالية :

[١] م ٲ = ٣ س − ٩ سم ، النقطة ٲ داخل الدائرة

[٢] م ٲ = ٢ س − ٦ سم ، النقطة ٲ على الدائرة

[٣] م ٲ = س − ٤ سم ، النقطة ٲ خارج الدائرة

الحـــــــل

[١] ∵ النقطة ٲ داخل الدائرة　∴ م ٲ < ٠

∴ ٣ س − ٩ < ٠　∴ ٣ س < ٩

∴ س < ٣　∴ س = ١ سم　أ؛ س = ٢ سم

[٢] ∵ النقطة ٩ على الدائرة ∴ م ٩ = ٠
∴ ٢ س – ٦ سم = ٠ ∴ ٢ س = ٦
∴ س = ٣ سم

[٣] ∵ النقطة ٩ خارج الدائرة ∴ م ٩ > ٠
∴ س – ٤ سم > ٠ ∴ س > ٤

****

تدريب : أكمل العبارات الاتية

١ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م ٩ = ١٣سم فإن ٩ تقع .... الدائرة

٢ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م ٩ = ٧سم فإن ٩ تقع .... الدائرة

٣ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م ٩ = ١٠سم فإن ٩ تقع .... الدائرة

٤ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م ٩ = صفرسم فإن ٩ تنطبق على

الدائرة ....

٥ـ دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م ٩ = $\frac{٣}{٥}$ نق سم فإن ٩ تقع .... الدائرة

٦ـ دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م ٩ = $\frac{٧}{٥}$ نق سم فإن ٩ تقع .... الدائرة

٧ـ دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م ٩ = نق سم فإن ٩ تقع .... الدائرة

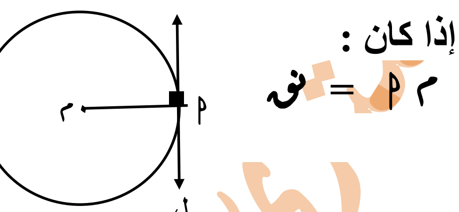
٨ـ دائرة طول قطرها ١٠سم فإذا كان المستقيم ل يمس الدائرة فإنه يبعد عن مركزها .... سم

٩ـ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، ٩ نقطة تقع على الدائرة فإن م ٩ = ... سم

****

موضع مستقيم بالنسبة لدائرة

إذا كانت دائرة م ، طول نصف قطرها نق ، ل مستقيم فى مستويها ، رسم ⊥ المستقيم ل فيكون :



ل يقع خارج الدائرة م

إذا كان : م ا > نق

ويلاحظ :

المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م

= ∅

ل يمس الدائرة م عند ا

إذا كان : م ا = نق

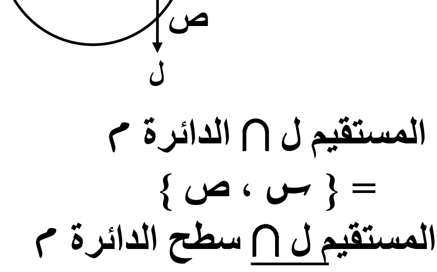
المستقيم ل ∩ الدائرة م = { ا }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م

= { ا }

ل يقطع الدائرة م

إذا كان : م ا < نق



المستقيم ل ∩ الدائرة م

= { س ، ص }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م

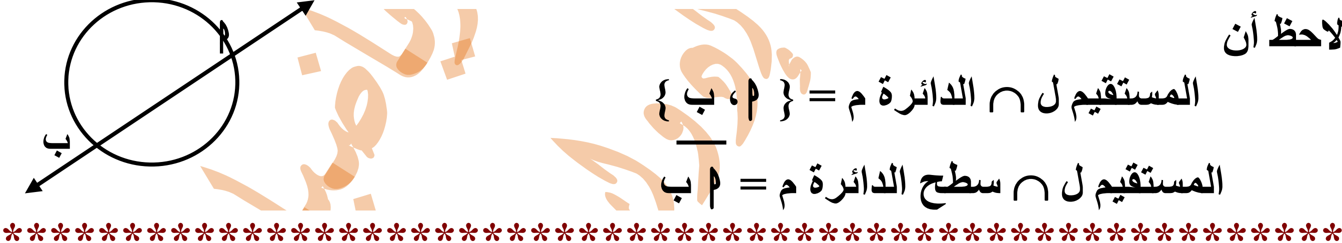
= س ص

، يسمى س ص وتر التقاطع

حقائق هامة: (١) المماس للدائرة يكون عموديا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

(٢) المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً لها

لاحظ أن



المستقيم ل ∩ الدائرة م = { ا ، ب }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = ا ب

****

مثـ١ـال : دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، ل مستقيم فى مستويها م ص ⊥ ل حيث م ص ∩ ل = { ص } عين موضع المستقيم ل فى الحالات التالية :

[١] م ص = ٦ سم [٢] م ص = ٩ سم [٣] م ص = ٧ سم

[١] ∵ نق = ٧ سم ، م ص = ٦ سم

∴ م ء < نق ∴ المستقيم ل قاطع للدائرة

[٢] ∵ نق = ٧ سم ، م ص = ٩ سم

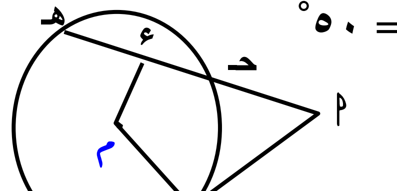
∴ م ء > نق ∴ المستقيم ل خارج الدائرة

[٣] ∵ نق = ٧ سم ، م ص = ٧ سم

∴ م ء = نق ∴ المستقيم ل مماس للدائرة

مثـ٢ـال : في الشكل المقابل : م دائرة ، $\overline{\text{ا ب}}$ مماس لها عند ب ، ء منتصف $\overline{\text{جـ هـ}}$ ، ق (∠ ب ا ء) = ٥٠° أوجد ق (∠ ب م ء)

الحـــــــل



المعطيات : $\overline{\text{ا ب}}$ مماس ، ء منتصف $\overline{\text{حـ هـ}}$ ، ق (∠ ب ا ء) = ٥٠°

المطلوب : إيجاد ق (∠ ب م ء)

البرهـــان : ∵ $\overline{\text{ا ب}}$ مماس للدائرة عند ب ، م ب = نق

∴ ق (∠ ا ب م) = ٩٠°

، ∵ ء منتصف $\overline{\text{حـ هـ}}$ ∴ ق (∠ ا ء م) = ٩٠°

، ∵ ا ب حـ ء شكل رباعى

∴ ق (∠ ب م ء) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ١٣٠°

****

تدريب : أكمل العبارات الاتية :-

١ـ دائرة مركزها م طول نصف قطرها = ٥سم ، ا ∈ ل حيث م $\overline{\text{ا}}$ ⊥ ل فإذا كان

(أ) م ا = ٧سم فإن ل يقع .... الدائرة

(ب) م ا = ٥سم فإن ل يسمى .... للدائرة

(جـ) م ا = ٢سم فإن ل يسمى .... للدائرة

٢ ـ دائرة مركزها م طول نصف قطرها = نق ، ا ∈ ل حيث م $\overline{\text{ا}}$ ⊥ ل فإذا كان

(أ) م ا = $\frac{٢}{٥}$ نق سم فإن ل يقع .... الدائرة

(ب) م ا = نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة

(جـ) م ا = $\frac{٩}{٥}$ نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة

٣ـ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = ϕ فإن ل يكون .... الدائرة

٤ـ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { س } فإن ل يكون .... الدائرة

٥ـ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { س ، ص} فإن ل يكون .... الدائرة

٦ـ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { ا ، ب} فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة = ...

٧ـ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { ا} فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة = ...

موضع دائرة بالنسبة لدائرة

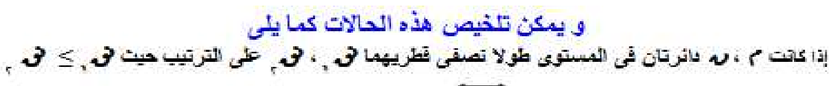
إذا كانت م ، ن دائرتان فى المستوى طولا نصفى قطريهما نق$_{1}$ ، نق$_{2}$ على الترتيب

حيث نق$_{1}$ $\geq$ نق$_{2}$ ، حيث $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين فيكون

الدائرتان متباعدتان	الدائرتان متقاطعتان	الدائرتان متداخلتان
إذا كان م ن > نق$_{1}$ + نق$_{2}$ * سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅ * الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅	إذا كان : نق$_{1}$ − نق$_{2}$ < م ن < نق$_{1}$ + نق$_{2}$ * $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك للدائرتين * الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب } * نتيجة : خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك وينصفه	إذا كان م ن < نق$_{1}$ − نق$_{2}$ * سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن * الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

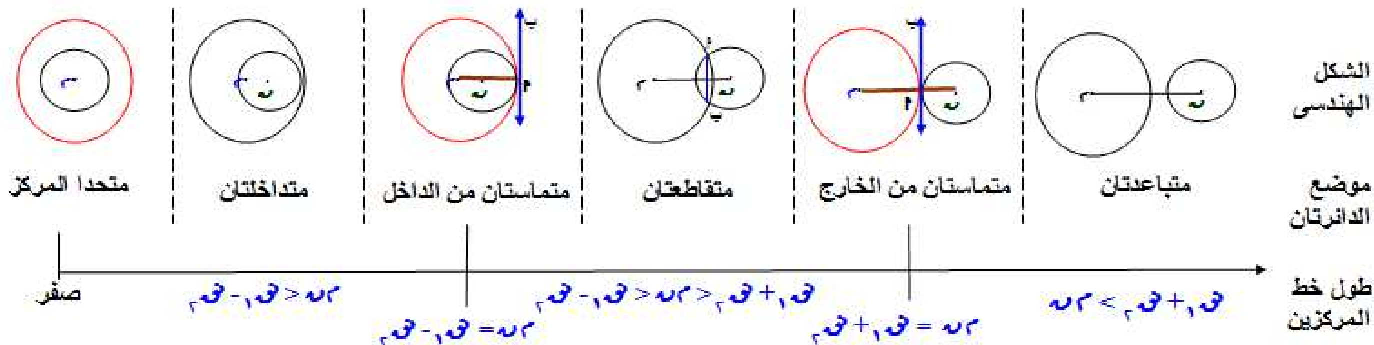
الدائرتان متماستان من الخارج	الدائرتان متماستان من الداخل	الدائرتان متحدتا المركز
إذا كان م ن = نق$_{1}$ + نق$_{2}$ * نقطة التماس أ يمر بها المماس المشترك $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ * سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }	إذا كان م ن = نق$_{1}$ − نق$_{2}$ * نقطة التماس أ يمر بها المماس المشترك $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، * سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن	إذا كان م ن = صفر * مركز الدائرة م ≡ مركز الدائرة ن * سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

* نتيجة : خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ويكون عموديا على المماس المشترك عند نقطة تماسهما


و يمكن تلخيص هذه الحالات كما يلى

إذا كانت م ، ن دائرتان فى المستوى طولا نصفى قطريهما $نق_١$ ، $نق_٢$ على الترتيب حيث $نق_١ \leq نق_٢$

، حيث $\overline{م ن}$ خط المركزين فيكون :



****

مثـــال : دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريها ٣ سم ، ٨ سم على الترتيب أجب عما يلى :

[١] عين موضع كل من الدائرتين بالنسبة للأخرى في الحالات التالية :

(١) م ن = ٨ سم (٢) م ن = ٣ سم (٣) م ن = ١٣ سم

[٢] أوجد طول $\overline{م ن}$ في الحالات التالية :

(١) الدائرتان متماستان من الداخل (٢) الدائرتان متماستان من الخارج

الحـــــــــل

∵ $نق_١ = ٣$ سم ، $نق_٢ = ٨$ سم

∴ $نق_١ + نق_٢ = ١١$ سم ، $نق_١ - نق_٢ = ٥$ سم

[١] (١) ∵ م ن = ٨ سم ∴ $نق_١ - نق_٢ < م ن < نق_١ + نق_٢$

∴ الدائرتان متقاطعتان

(٢) ∵ م ن = ٣ سم ∴ $م ن < نق_١ - نق_٢$

∴ الدائرتان متداخلتان

(٣) ∵ م ن = ١٣ سم ∴ $م ن > نق_١ + نق_٢$

∴ الدائرتان متباعدتان

[٢] (١) ∵ الدائرتان متماستان من الداخل ∴ $م ن = نق_١ - نق_٢ = ٥$ سم

(٢) ∵ الدائرتان متماستان من الخارج ∴ $م ن = نق_١ + نق_٢ = ١١$ سم

****

مثـ٢ـال : في الشكل المقابل : م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب حيث
$\overline{م ن}$ ∩ $\overline{أ ب}$ = { ء } ، ق (∠ أ م ن) = ٣٠° أثبت أن ∆ أ ب م متساوى الأضلاع

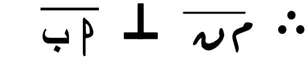
الحــــــــل

المعطيات : م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب حيث $\overline{م ن}$ ∩ $\overline{أ ب}$ = { ء }
، ق (∠ أ م ن) = ٣٠°



المطلوب : أثبات أن ∆ أ ب م متساوى الأضلاع

البرهــان : ∵ م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب



∴ $\overline{م ن}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ ق (∠ أ ء م) = ٩٠°

فى ∆ أ ء م ∵ ق (∠ أ م ن) = ٣٠°

∴ ق (∠ م أ ء) = ٦٠°

في ∆ أ ب م : ، ∵ م أ = م ب " أنصاف أقطار "

∴ ق (∠ م ب أ) = ق (∠ م أ ب) = ٦٠°

∴ ق (∠ أ م ب) = ٦٠°

∴ م أ = م ب = أ ب ∴ ∆ أ ب م متساوى الأضلاع

****

تدريب أكمل العبارات الاتية :

١ـ دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٥سم فإن الدائرتان تكونان ....

٢ـ دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٣سم فإن الدائرتان تكونان ....

٣ـ دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٥سم فإن الدائرتان تكونان ....

٤ـ دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٣سم فإن الدائرتان تكونان ....

٥- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١سم فإن الدائرتان تكونان ....

٦- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما $نق_1$ سم ، $نق_2$ سم فإذا كان م ن > $نق_1$ + $نق_2$ فإن الدائرتان تكونان ....

٧- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما $نق_1$ سم ، $نق_2$ سم فإذا كان م ن = $نق_1$ + $نق_2$ فإن الدائرتان تكونان ....

٨- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما $نق_1$ سم ، $نق_2$ سم فإذا كان م ن > $نق_1$ - $نق_2$ فإن الدائرتان تكونان ....

٩- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما $نق_1$ سم ، $نق_2$ سم فإذا كان م ن = $نق_1$ - $نق_2$ فإن الدائرتان تكونان ....

١٠- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما $نق_1$ سم ، $نق_2$ سم فإذا كان $نق_1$ – $نق_2$ > م ن > $نق_1$ + $نق_2$ فإن الدائرتان تكونان ....

١١- إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ فإن الدائرتان تكونان .... أو ....

١٢- إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان تكونان .... أو ....

١٣- إذا كانت سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان تكونان ....

١٤- إذا كانت سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن فإن الدائرتان تكونان .... أو ....

١٥- إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ فإن الدائرتان تكونان ....

١٦- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين = ...

١٧- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الخارج = ...

١٨- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين = ...

١٩- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الداخل = ...

٢٠- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين = ...

تمارين

(١) دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، ٩ نقطة فى مستويها فأكمل ما يلى :

١ ـ إذا كان : م ٩ = ٦ سم فإن : ٩ تقع ٠٠٠٠٠ الدائرة

٢ ـ إذا كان : م ٩ = ٥ سم فإن : ٩ تقع ٠٠٠٠٠ الدائرة

٣ ـ إذا كان : م ٩ = ٣ سم فإن : ٩ تقع ٠٠٠٠٠ الدائرة

٤ ـ إذا كان : م ٩ = صفر سم فإن : ٩ تقع ٠٠٠٠٠ الدائرة

(٢) دائرة م ، ٩ نقطة فى مستويها فأختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ ـ إذا كان : طول قطر الدائرة = ٦ سم ، ٩ تقع على الدائرة فإن : م ٩ = ٠٠٠٠٠ سم

[٣ ؛ ٥ ؛ ٦ ؛ ١٢]

٢ ـ إذا كان : نق = ٤ سم ، ٩ تقع داخل الدائرة فإن : م ٩ = ٠٠٠٠٠ سم

[٣ ؛ ٤ ؛ ٥ ؛ ٦]

٣ ـ إذا كان : نق = ٧ سم ، ٩ تقع خارج الدائرة فإن : م ٩ = ٠٠٠٠٠ سم

[٣ ؛ ٦ ؛ ٧ ؛ ١٢]

٤ ـ إذا كان : صفر < م ٩ < نق فإن : ٩ تقع ٠٠٠٠٠

[خارج الدائرة ؛ داخل الدائرة ؛ على الدائرة ؛ على مركز الدائرة]

(٣) دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، م ٩ ⊥ ل ، ٩ ∈ ل فأكمل ما يلى :

١ ـ إذا كان : م ٩ = ٦ سم فإن : المستقيم ل ٠٠٠٠٠

٢ ـ إذا كان : م ٩ = ٥ سم فإن : المستقيم ل ٠٠٠٠٠

٣ ـ إذا كان : م ٩ = ٣ سم فإن : المستقيم ل ٠٠٠٠٠

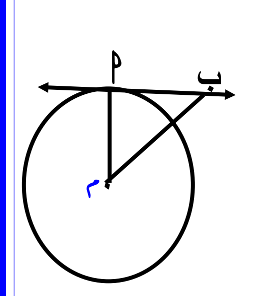
(٤) أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ ـ إذا كان : المستقيم ل مماساً لدائرة طول قطرها ٦ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم

[٣ ؛ ٥ ؛ ٦ ؛ ١٢]

٢ ـ إذا كان : المستقيم ل قاطعاً لدائرة طول نصف قطرها ٦ سم فإنه يبعد عن مركزها ..... سم

[٣ ؛ ٦ ؛ ٧ ؛ ١٢]



٣ – فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ ، ق (< ب) = ٤٠ °

فإن: ق (< م) = ... ° [٤٠ ؛ ٤٥ ؛ ٥٠ ؛ ٦٠]

٤ – فى الشكل السابق : إذا كان : أ ب = ١٢ سم ، م أ = ٥ سم

فإن : م ب = ... سم [١٢ ؛ ٥ ؛ ١٣ ؛ ٧]

(٥) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣ سم على الترتيب فأكمل ما يلى :

١ – إذا كان : م ن = ٦ سم فإن : الدائرتان .....

٢ – إذا كان : م ن = ٢ سم فإن : الدائرتان .....

٣ – إذا كان : م ن = ٨ سم فإن : الدائرتان .....

٤ – إذا كان : م ن = ١ سم فإن : الدائرتان .....

٥ – إذا كان : م ن = ٩ سم فإن : الدائرتان .....

٦ – إذا كان : م ن = صفر فإن : الدائرتان .....

(٦) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٩سم على الترتيب

أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ – إذا كان : الدائرتان متماستين من الخارج فإن م ن = ... سم [٤ ؛ ٥ ؛ ٩ ؛ ١٣]

٢ – إذا كان : الدائرتان متماستين من الداخل فإن م ن = ... سم [٤ ؛ ٥ ؛ ٩ ؛ ١٣]

٣ – إذا كان : الدائرتان متقاطعتين فإن م ن = ... سم [٠ ؛ ١٤ ؛ ١٠ ؛ ٩]

٤ – إذا كان : الدائرتان متحدتا المركز فإن م ن = ... سم [٠ ؛ ١٤ ؛ ١٠ ؛ ٩]

٥ – إذا كان : الدائرتان متباعدتين فإن م ن = ... سم [٩ ؛ ٤ ؛ ٥ ؛ ١٥]

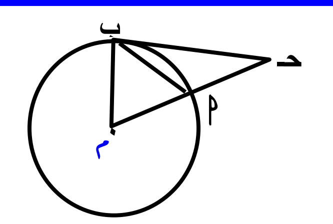
٦ – إذا كان : الدائرتان متداخلتين فإن م ن = ... سم [٩ ؛ ٤ ؛ ٥ ؛ ١٥]

(٧) فى الشكل المقابل :

ص س مماس للدائرة ن عند س ، ق (< ع) = ٣٥ °

، ن ∈ $\overline{\text{ص ع}}$ أوجد ق (< س ص ع)

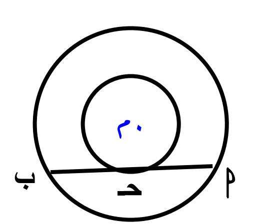
(٨) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، ق (< حـ) = ٤٠ ،

، ق (< م ٲ ب) = ٦٥° أثبت أن ب حـ مماس للدائرة م

(٩) فى الشكل المقابل :

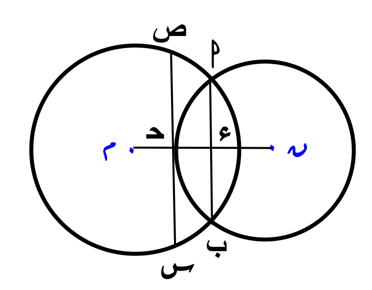


دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣ سم

، ٲ ب وتر فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى في حـ

أوجد طول ٲ ب

(١٠) فى الشكل المقابل :

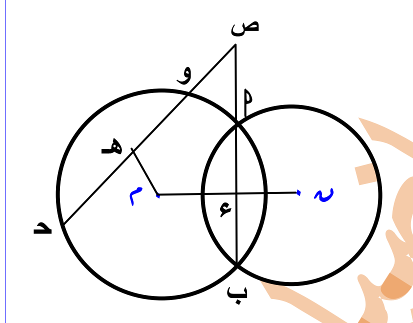


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ٲ ، ب ، حـ ∈ س ص

، س ص تمس الدائرة م عند حـ أثبت أن

[١] ٲ ب // س ص　　[٢] حـ منتصف س ص

(١١) فى الشكل المقابل :



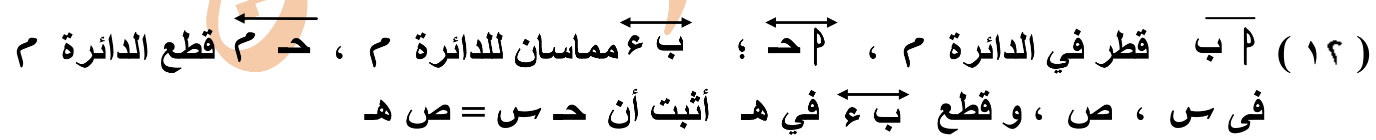
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ٲ ، ب ، هـ منتصف حـ و

، ق (< ب ص حـ) = ٥٣° ، ق (< ء م هـ) =

(٣ س – ٧)° أوجد قيمة س

(١٢) ٲ ب قطر في الدائرة م ، ٲ حـ ؛ ب ء مماسان للدائرة م ، حـ م قطع الدائرة م

فى س ، ص ، و قطع ب ء في هـ أثبت أن حـ س = ص هـ



****

تعيين الدائرة

يمكن رسم " تعيين " دائرة بشروط معطاه مهما أختلفت إذا علم :

١ – مركزها ٢ – طول نصف قطرها

أولا : رسم دائرة تمر بنقطة معلومة

المعطيات : ؏ نقطة معلومة في المستوى

المطلوب : رسم دائرة تمر بالنقطة ؏

خطوات الإنشاء :

(١) نأخذ أى نقطة إختيارية مثل م فى نفس المستوى

(٢) نضع سن الفرجار عند م و بفتحة تعادل م؏ نرسم الدائرة م نجد أن الدائرة م تمر بالنقطة ؏

(٣) نضع سن الفرجار عند نقطة أخرى م/ و بفتحة تعادل م/ ؏ نرسم الدائرة م/ نجد أن الدائرة م/ تمر بالنقطة ؏

(٤) نكرر العمل السابق

ملاحظات : (١) لكل نقطة إختيارية " مركز الدائرة " يمكن رسم دائرة تمر بالنقطة ؏

(٢) يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة مثل ؏

(٣) إذا كانت أنصاف أقطار الدوائر المراد رسمها متساوية فى الطول " الدوائر متطابقة : فإن مراكزها جميعاً تقع على دائرة واحدة مطابقة لهم ومركزها نقطة ؏

****

ثانيا : رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين

المعطيات : ؏ ، ب نقطتان معلومتان في المستوى

المطلوب : رسم دائرة تمر بالنقطتين ؏ ، ب " أى أن : $\overline{\text{؏ ب}}$ وتر فى الدائرة م

خطوات الإنشاء :

(١) نرسم $\overline{\text{؏ ب}}$

(٢) نرسم المستقيم ل محور $\overline{\text{؏ ب}}$ حيث ل ∩ $\overline{\text{؏ ب}}$ = { و }

" مركز الدائرة يقع على محور الوتر $\overline{\text{؏ ب}}$ "

(٣) نأخذ أى نقطة إختيارية مثل م حيث م ∈ ل ،

نركز بس الفرجار فى م و بفتحة تساوى م؏

نرسم الدائرة م نجد أنها تمر بالنقطة ب

(٤) نضع سن الفرجار عند نقطة أخرى م/ حيث م/ ∈ ل

و بفتحة تعادل م/ أ نرسم الدائرة م/ نجد أنها تمر بالنقطة ب

(٥) نكرر العمل السابق

ملاحظات : (١) تذكر : لرسم المستقيم ل محور $\overline{أ ب}$:

نركز بسن الفرجار فى أ وبفتحة مناسبة نرسم قوسين فى جهتى $\overline{أ ب}$ وبنفس الفتحة نركز سن الفرجار فى ب ونرسم قوسين يقطعان القوسين الآخرين فى نقطتين نرسم المستقيم ل يمر بهمـا فيكون هو محور $\overline{أ ب}$

(٢) يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطتين معلومتين

(٣) إذا كان : نق > ½ أ ب فإنه يمكن رسم دائرتين ؛ أما إذا كان : نق = ½ أ ب فإنه يمكن رسم دائرة واحدة ، وهى أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين أ ، ب وتكون $\overline{أ ب}$ قطـــراً فيها ومركزها هو منتصف ؛ و إذا كان : نق < ½ أ ب فإنه لا يمكن رسم دائرة

(٤) لا يمكن أن تتقاطع دائرتان فى أكثر من نقطتين

****

ثالثاً : رسم دائرة تمر بثلاث نقط معلومة

المعطيات : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط معلومة في المستوى

المطلوب : رسم دائرة م تمر بالنقاط الثلاث أ ، ب ، حـ

خطوات الإنشاء :

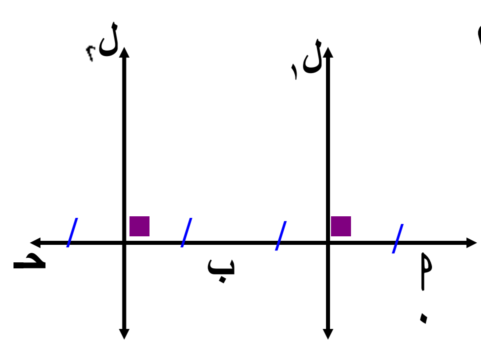
(١) نرسم المستقيم ل١ محور $\overline{أ ب}$ فيكون م ∈ ل١

(٢) نرسم المستقيم ل٢ محور $\overline{ب حـ}$ فيكون م ∈ ل٢

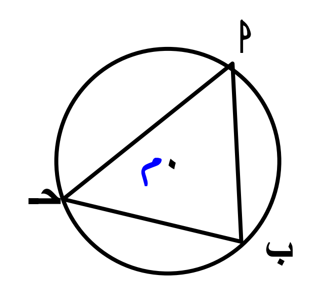
(٣) إذا كان :

[١] ل١ ∩ ل٢ = { م } نضع سن الفرجار فى م و بفتحة تساوى م أ نرسم الدائرة م نجد أنها تمر بالنقطتين ب ، حـ

[٢] ل١ ∩ ل٢ = ∅ فإن : ل١ // ل٢ و بالتالى لا يمكن رسم دائرة تمر بالنقاط الثلاث أ ، ب ، حـ



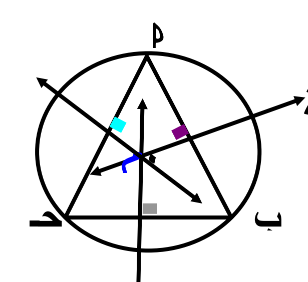
ملاحظات :



(١) أى ثلاث نقاط لا تنتمى لمستقيم واحد يمر بها دائرة وحيدة

(٢) لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقط تنتمى لمستقيم واحد

(٣) الدائرة المارة برؤوس مثلث تسمى دائرة خارجة لهذا المثلث
في الشكل المقابل : م هى الدائرة الخارجة للمثلث ا ب حـ
أو ∆ ا ب حـ مرسوم داخل الدائرة م



(٤) الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة
واحـــدة هى مركـــز الدائـــــرة الخارجـــــة لهذا المثلث
كما فى الشكل المقابل

(٥) * مركز الدائرة الخارجة للمثلث الحاد الزوايا يقع داخل المثلث
* مركز الدائرة الخارجة للمثلث المنفرج الزوايا يقع خارج المثلث
* مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية يقع فى منتصف وتر المثلث

حالة خاصة : مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه وهى نفسها نقطة تقاطع متوسطاته وهى نفسها نقطة تقاطع منصفات زوايـــاه الداخلة وهى نفسها نقطة تقاطع إرتفاعاته

****

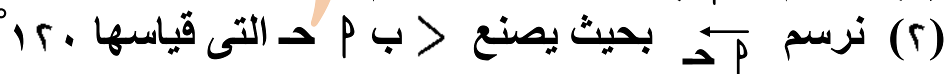
مثــ١ــال : أرسم ∆ ا ب حـ الذى فيه ا ب = ا حـ = ٤ سم ، ق (∠ ا) = ١٢٠°
ثم أرسم الدائرة الخارجة عنه



الحـــــــل



(١) نرسم ا ب حيث ا ب = ٤ سم



(٢) نرسم ا حـ بحيث يصنع ∠ ب ا حـ التى قياسها ١٢٠°

(٣) نحدد نقطة حـ على ا حـ بحيث ا حـ = ٤ سم

(٤) نصل ب حـ فيكون ∆ ا ب حـ

(٥) نرسم محور التماثل لكل من ا ب ، ا حـ و ليكونا ل١ ، ل٢
على الترتيب فيتقاطعا فى م

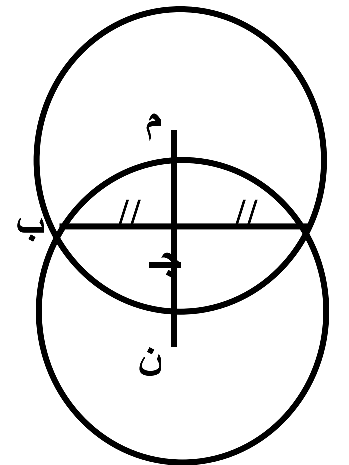
(٦) نركز بسن الفرجار في نقطة م و بفتحة تساوى م ا نرسم الدائرة م
نجد أنها تمر بالنقاط ا ، ب ، حـ

****

مثـ٢ـال : ارسم القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ طولها ٥سم ثم أرسم دائرة يكون $\overline{أب}$ وتر فيها

كم دائرة يمكن رسمها ؟

الخطوات :-



١-نرسم $\overline{أب}$ بحيث أ ب = ٥سم ثم ننصف أ ب فى جـ

٢-نرسم محور $\overline{أب}$ وليكن ل

٣-نركز فى احدى نهايتى $\overline{أب}$ بسن الفرجار بفتحة تساوى اكبر من نصف $\overline{أب}$ قليلا

٤-نرسم قوساً يقطع المستقيم ل فى نقطتى م ، ن

نركز بسن الفرجار فى م وبنفس الفتحة نرسم الدائرة م فتمر بالنقطتين أ ، ب ثم نركز فى ن بنفس الفتحة ونرسم الدائرة ن

لاحظ أن :- يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر مختلفة فى طول نصف القطر بحيث يكون $\overline{أب}$ وترا فيها

****



تمارين

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ ـ يمكن رسم دائرة .... تمر بنقطة معلومة

(دائرة واحدة ؛ دائرتان ؛ ثلاث دوائر ؛ عدد لا نهائى من الدوائر)

٢ ـ عدد الدوائر المارة بطرفى قطعة مستقيمة ....

(دائرة واحدة ؛ دائرتان ؛ ثلاث دوائر ؛ عدد لا نهائى من الدوائر)

٣ ـ عدد الدوائر المارة بثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد ....

(دائرة واحدة ؛ دائرتان ؛ ثلاث دوائر ؛ لا يوجد)

٤ ـ عدد الدوائر المارة بثلاث نقط تنتمى لمستقيم واحد ....

(دائرة واحدة ؛ دائرتان ؛ ثلاث دوائر ؛ لا يوجد)

٥ ـ جميع الدوائر المارة بالنقطتين س ، ص تقع جميع مراكزها على ....

($\overline{\text{س ص}}$ ؛ العمود المقام على $\overline{\text{س ص}}$ ، محور تماثل $\overline{\text{س ص}}$ ؛ نقطة منتصف $\overline{\text{س ص}}$)

٦ ـ إذا كان $\triangle$ س ص ع قائم الزاوية فى ص فإن مركز الدائرة المارة برؤوسه هو ....

(منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ؛ منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ؛ منتصف $\overline{\text{ع ص}}$ ؛ خارج المثلث)

٧ ـ مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تقاطع ....

(متوسطاته ؛ إرتفاعاته ؛ منصفات زواياه الداخلة ؛ محاور تماثل أضلاعه)

٨ ـ طول نصف قطر أصغر دائرة مارة بطرفى قطعة مستقيمة طولها ٦ سم هو ....

(١٫٥ ؛ ٣ ؛ ٦ ؛ ٩)

٩ ـ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(معين ؛ مربع ؛ مستطيل ؛ مثلث متساوى الساقين)

(٢) أجب عما يلى :

١ ـ إذا كانت ٢ ∈ المستقيم ل فأرسم دائرة م تمر بنقطة ٢ ويكون طول نصف قطرها ٤ سم عندما :
* م ∈ المستقيم ل ... كم دائرة يمكن رسمها ؟
* م ∉ المستقيم ل ... كم دائرة يمكن رسمها ؟

٢ ـ إرسم قطعة مستقيمة طولها ٦ سم ثم إرسم دائرة تمر بطرفيها وطول نصف قطرها ٤ سم أذكر عدد الدوائر التى يمكن رسمها

٣ ـ إرسم قطعة مستقيمة طولها ٨ سم ثم إرسم دائرة تمر بطرفيها وطول نصف قطرها أصغر ما يمكن ، أذكر عدد الدوائر التى يمكن رسمها

٤ ـ إرسم ل١ ، ل٢ مستقيمين متوازيين البعد بينهما ٤ سم ثم إرسم دائرة يقع مركزها على ل١ وتمس ل٢

٥ ـ Δ ٢ ب حـ فيه : ٢ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٥ سم ، ٢ حـ = ٦ سم إرسم الدائرة الخارجة عنه ما نوع المثلث Δ ٢ ب حـ بالنسبة لقياسات زواياه ؟ و أين يقع مركز الدائرة بالنسبة للمثلث ؟

٦ ـ Δ ٢ ب حـ فيه : ٢ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم ، ٢ حـ = ٧ سم إرسم الدائرة الخارجة عنه ما نوع المثلث Δ ٢ ب حـ بالنسبة لقياسات زواياه ؟ و أين يقع مركز الدائرة بالنسبة للمثلث ؟

٧ ـ Δ ٢ ب حـ فيه : ٢ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٥ سم ، ٢ حـ = ٣ سم إرسم الدائرة الخارجة عنه ما نوع المثلث Δ ٢ ب حـ بالنسبة لقياسات زواياه ؟ و أين يقع مركز الدائرة بالنسبة للمثلث ؟

٨ ـ Δ ٢ ب حـ متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ سم إرسم الدائرة الخارجة عنه حدد موضع مركز الدائرة بالنسبة إلى : إرتفاعات المثلث ، متوسطات المثلث ، منصفات زوايا رؤوس المثلث ، كم عدد محاور تماثل هذا المثلث ؟

٩ ـ Δ ٢ ب حـ فيه : ٢ ب = ٧ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠° ، ق (∠ حـ) = ٣٠° ثم أرسم الدائرة التى تمر برؤوسه و أحسب مساحتها " $\pi = \frac{22}{7}$ "

١٠ ـ أرسم المستطيل ٢ ب حـ ء الذى بعداه ٣ سم ، ٤ سم ثم بين كيف ترسم الدائرة المارة برؤوسه من الخارج و أحسب طول نصف قطر هذه الدائرة

****

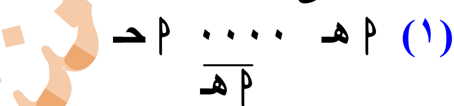
علاقة أوتار الدائرة بمركزها

تمهيد : في الشكل المقابل

بعد الوتر $\overline{أهـ}$ عن مركز الدائرة م يساوى م س حيث س منتصف الوتر $\overline{أهـ}$

* أكمل ما يلى :

(١) أ هـ ..... أ حـ



(٢) بعد الوتر $\overline{أهـ}$ عن مركز الدائرة م .....

بعد الوتر $\overline{أحـ}$ عن مركز الدائرة م

(٣) $(م س)^٢ + (أ س)^٢ = ...$

و إذا كان نق هو طول نصف قطر الدائرة م فإن : $(م س)^٢ + (أ س)^٢ = ...$

(٤) إذا كان : أ هـ = أ ء فإن :

بعد الوتر $\overline{أهـ}$ عن مركز الدائرة م ..... بعد الوتر $\overline{أء}$ عن مركز الدائرة م

(٥) إذا تساوت الأوتار في الطول فإن أبعاد هذه الأوتار عن مركز الدائرة تكون .....

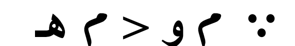
(٦) إذا تساوت أبعاد الأوتار عن مركز الدائرة فإن هذه الأوتار تكون .....

ملاحظة : كلما أقترب الوتر من مركز الدائرة زاد طوله و العكس صحيح

****

مثـــال١ في الشكل المقابل : إذا كان أ ب = ٧ سم ، حـ ء = (س + ١) سم ، م ب = ٥ سم ، م و > م هـ أوجد قيم س

الحـــــــــل



∵ م و > م هـ

∴ حـ ء > أ ب　　أى أن : حـ ء > ٧

∴ س + ١ > ٧　　∴ س > ٦　　(١)

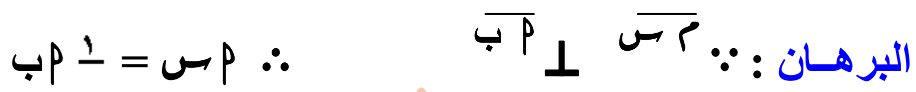
∵ $\overline{حـ ء}$ وتر في الدائرة م　　∴ حـ ء ⩽ ١٠　لماذا ؟

∴ س + ١ ⩽ ١٠　　∴ س ⩽ ١٠　　(٢)

من (١) ، (٢) ينتج : ٦ > س ⩽ ١٠　　∴ س ∈] ٦ ، ١٠]

****

نظريـــة : الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركزها



المعطيات : ا ب = حـ ء ، م س ⊥ ا ب ، م ص ⊥ حـ ء

المطلوب : إثبات أن : م س = م ص

العمــــل : نرسم م ا ، م حـ

البرهـان : ∵ م س ⊥ ا ب ∴ ا س = ½ ا ب

∵ م ص ⊥ حـ ء ∴ حـ ص = ½ حـ ء

∵ ا ب = حـ ء ∴ ا س = حـ ص

∴ Δ ا س م ، Δ حـ ص م فيهما :

ا س = حـ ص

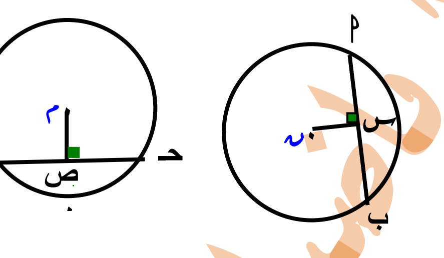
م ا = م حـ = نق

ق (< ا س م) = ق (< حـ ص م) = ٩٠°

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن : م س = م ص

****

نتيجة : الأوتار المتساوية فى الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز



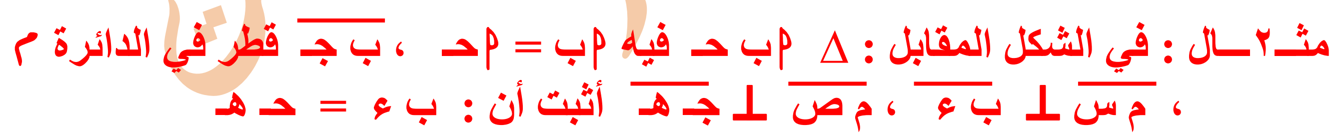
ففى الشكل المقابل :

إذا كانت الدائرتان م ، ن متطابقتان

، ا ب = حـ ء

، ن س ⊥ ا ب ، م ص ⊥ حـ ء

فإن : ن س = م ص



مثــ٢ــال : في الشكل المقابل : Δ ا ب حـ فيه ا ب = ا حـ ، ب جـ قطر في الدائرة م ، م س ⊥ ب ء ، م ص ⊥ جـ هـ أثبت أن : ب ء = حـ هـ

الحــــــــــــل

∵ ا ب = ا حـ ∴ ق (< ب) = ق (< حـ)

∴ Δ س م ب ≡ Δ ص م حـ لأن : م ب = م حـ

، ق (< ب) = ق (< حـ)

، ق (< س ب م) = ق (< س حـ م) = ٩٠°



∴ م س = م ص ∴ ب ء = حـ هـ

****



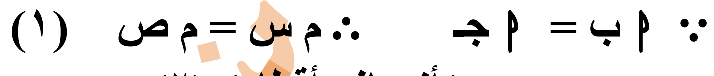
مثـ٣ـال : فى الشكل المقابل ٢ ب = ٢جـ ، س منتصف ٢ب ، ص منتصف ٢جـ
م س يقطع الدائرة فى ء ، م ص يقطع الدائرة فى هـ

إثبت أن : (١) س ء = ص هـ (٢) ق (∠ ء ٢ س) = ق (∠هـ ٢ ص)

الحــــــــــل

∵ س منتصف ٢ ب ∴ م س ⊥ ٢ ب ، ∵ ص منتصف ٢ جـ ∴ م ص ⊥ ٢ جـ

∵ ٢ ب = ٢ جـ ∴ م س = م ص (١)



∵م ء = م هـ (أنصاف أقطار) (٢)

بطرح ٢ من ١ م ء – م س = م هـ - م ص

∴ س ء = هـ ص (وهو المطلوب أولا)

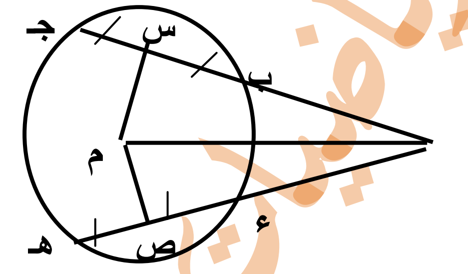
ΔΔ ٢ ء س ، ٢ هـ ص فيهما
- ٢ س = ٢ ص
- ء س = هـ ص (مثبت)
- ق∠ (٢ ء س) = ق (∠٢ ص هـ)=°٩٠

∴ Δ ٢ ءس ≡ Δ٢هـص ومن التطابق ينتج أن

∴ ق (∠ء ٢ س) = ق (∠هـ ٢ ص) [المطلوب ثانياً]

****

مثـ٤ـال : فى الشكل المقابل ب جـ = ء هـ ، س منتصف ب جـ ، ص منتصف ء هـ
إثبت أن : ٢ ب = ٢ ء



الحــــــــــل

∵ س منتصف ب جـ ∴ م س ⊥ ب جـ

∵ ص منتصف ء هـ ∴ م ص ⊥ ء هـ

∴ ب جـ = ء هـ ∴ م س = م ص

ΔΔ ٢ م س ، ٢ م ص فيهما
- ٢ م ضلع مشترك
- م س = م ص
- ق (∠ ٢ س م)= ق (∠ ٢ص م) = °٩٠

∴ Δ٢ س م ≡ Δ٢ ص م

ومن التطابق ينتج أن : ٢ س = ٢ ص (١) ولكن ب س = ء ص (٢)

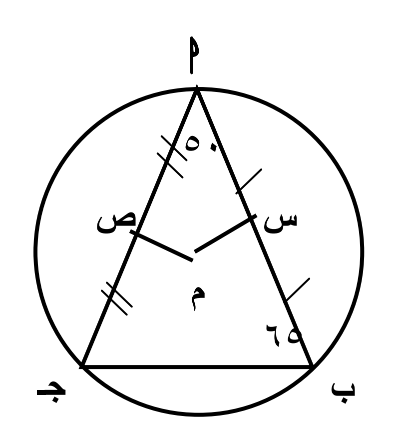
بطرح ٢ من ١ ∴ ٢س – ب س = ٢ ص – ء ص

∴ ٢ ب = ٢ ء وهو المطلوب إثباته

****

مثـ٥ـال : فى الشكل المقابل ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ب) = ٦٥° ، س ، ص منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ على الترتيب (١) أوجد ق (∠ س م ص) (٢) إثبت أن م س = م ص

الحـــــــــل



∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°

∴ ق (∠جـ) = ١٨٠° ـ [٥٠° +٦٥°] = ٦٥°

∵ ق (∠ب) = ق (∠جـ) ∴ أ ب = أ جـ

∵ س منتصف أ ب $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$

ق (∠م س أ) = ٩٠°

∵ ص منتصف $\overline{أ جـ}$ ∴ $\overline{م ص} \perp \overline{أ جـ}$ ∴ ق (∠م ص أ) = ٩٠°

∴ ق (∠س م ص) = ٣٦٠° ـ [٥٠+٩٠+٩٠] = ١٣٠°

∴ أ ب = أ جـ ، $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{أ جـ}$

∴ م س = م ص

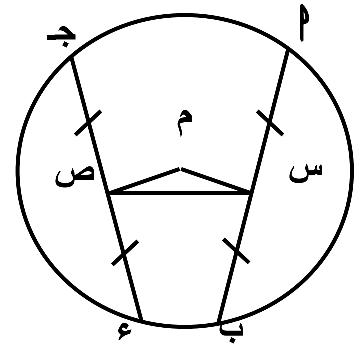
****

مثـ٦ـال : فى الشكل المقابل $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فى الدائرة م ، س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{جـ ء}$. برهن أن ق (∠ ب س ص) = ق (∠ ء ص س)

الحـــــــــل

∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ ق (∠م س ب) = ٩٠°

∵ ص منتصف $\overline{جـ ء}$ ∴ ق (∠ م ص ء) = ٩٠°



∴ (∠ م س ب) = ق (∠ م ص ء) (١)

أ ب = جـ ء ، $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{جـ ء}$

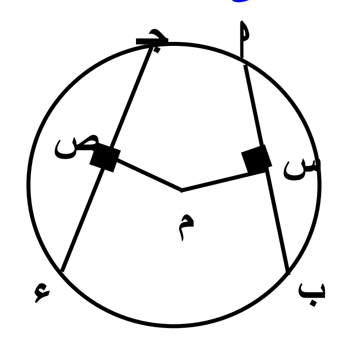
∴ م س = م ص

فى Δ م س ص ∵ م س = م ص (٢)

∴ ق (∠م س ص) = ق (∠ م ص س)

طرح ٢ من ١ ينتج أن ∴ق (∠ ب س ص) = ق (∠ ء ص س)

عكس النظرية فى الدائرة الواحد (أو الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول



فمثلا فى الشكل المقابل

إذا كان م س ⊥ ٰا ب ، م ص ⊥ جـ ء

، م س = م ص

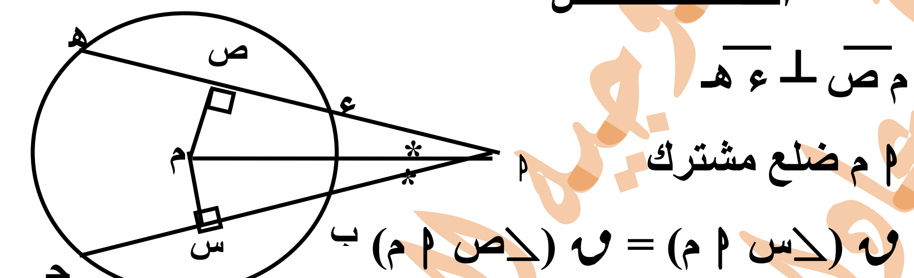
فإن : ٰا ب = جـ ء

****

مثـ١ـال : فى الشكل المقابل دائرة م فيها ٰا م ينصف (∠ هـ ٰا جـ) إثبت أن ب جـ = ء هـ

الحـــــــل

العمل : نرسم م س ⊥ ب جـ ، م ص ⊥ ء هـ



فى ΔΔ ٰا م س، ٰا م ص فيهما
- ٰا م ضلع مشترك
- ق (∠ س ٰا م) = ق (∠ ص ٰا م)
- ق (∠ ٰا س م) = ق (∠ ٰا ص م)

∴ Δ ٰا س م ≡ Δ ٰا ص م

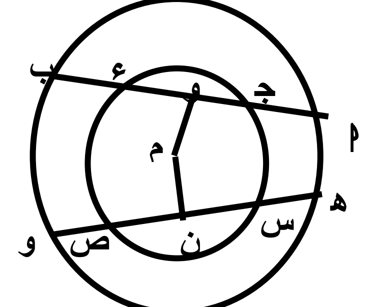
∴ م س = م ص ∴ ب جـ = ء هـ

****

مثـ٢ـال : فى الشكل المقابل دائرتان متحدتا المركز م ، ٰا ب وتر فى الكبرى يقطع الصغرى فى جـ ، ء ، هـ و وتر فى الكبرى يقطع الصغرى فى س ، ص فإذا كان ٰا ب = هـ و

إثبت أن : جـ ء = س ص

الحـــــــل



العمل :- نرسم م و ⊥ ٰا ب ، م ن ⊥ هـ و

فى الدائرة الكبرى : ٰا ب = هـ و ∴ م و = م ن

فى الدائرة الصغرى : م و = م ن ∴ جـ ء = س ص

****

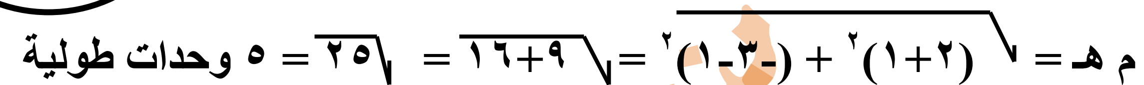
مثـ٣ـال : فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران فى الدائرة م حيث م=(٢ ، -٣)

فإذا كان هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ حيث

هـ = (-١ ، ١) ، و = (٦ ، ٠) إثبت أن أ ب = جـ ء

الحـــــــــل



م هـ = $\sqrt{(٢+١)^٢ + (-٣-١)^٢}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

م و = $\sqrt{(٢ - ٦)^٢ + (٠+٣)^٢}$ = $\sqrt{١٦+٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$　　∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

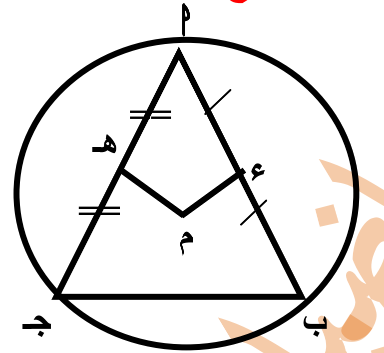
∵ و منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$　　∴ $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

∵ م هـ = م و　　∴ أ ب = جـ ء

****

مثـ٤ـال : فى الشكل المقابل ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$, م ء = م هـ ،

ق (∠ ء م هـ) = ١٢٠° إثبت أن : Δ أ ب جـ متساوى الاضلاع



الحـــــــــل

∵ ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$　∴ $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$　(١)

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$　∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$　(٢)

∵ م ء = م هـ　(٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن　∴ أ ب = أ جـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠جـ)

∴ق (∠أ) = ٣٦٠° − [٩٠+٩٠+١٢٠]= ٦٠°

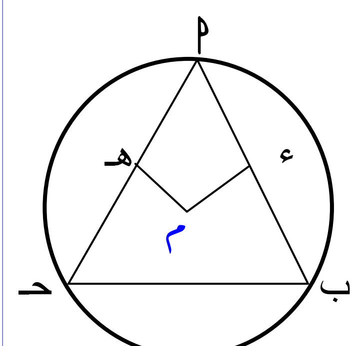
∴ق (∠ب) =ق (∠ جـ) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$ = $\frac{١٢٠}{٢}$ =٦٠°

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ب) = ق (∠ جـ)　∴ أ ب جـ متساوى الاضلاع

****

مثـ٥ـال : في الشكل المقابل : دائرة م ، م ء = م هـ ، ء ، هـ منتصفى $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ حـ}}$

، ق (ب) = ٧٠ ° أوجد ق (أ)



الحـــل

∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$

بالمثل $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{أحـ}$

∵ م ء = م هـ ∴ أ ب = أ حـ

∴ ق (∠ أ) = 180° − (70° + 70°) = 40°



****

مثـــال ٦ : فى الشكل المقابل $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ ، س ء = ص هـ

إثبت أن : أ ب = أ جـ



الحـــل



∵ م س = م ص (أنصاف أقطار) (١)

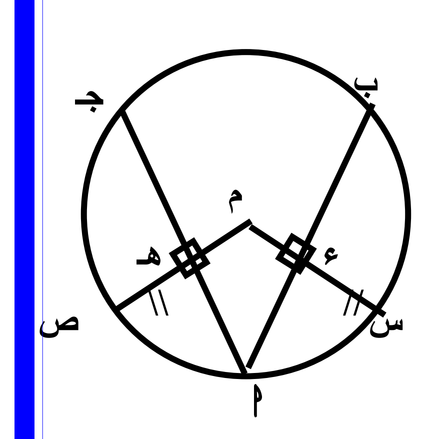
∵ س ء = ص هـ (معطى) (٢)

بطرح ٢ من ١ م س ـ س ء = م ص ـ ص هـ

∴ م ء = م هـ (٤)

∵ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، ∵ $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ (٥)

من ٤ ، ٥ ينتج أن ∴ أ ب = أ جـ



****

مثـــال ٧ : فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث ، $\overline{بجـ}$ قطر فى الدائرة م

رسم $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ فإذا كان ب ء = جـ هـ إثبت أن أ ب = أ جـ

الحـــل

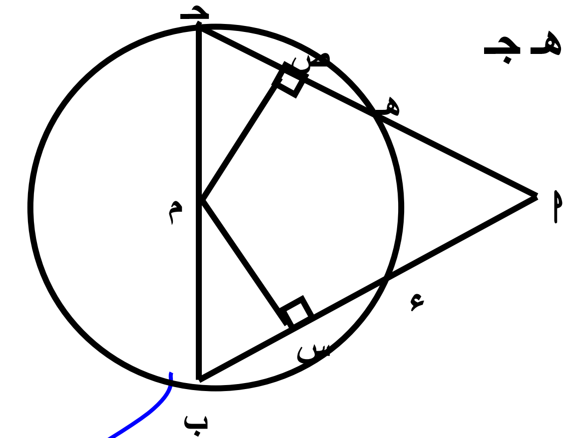
∵ $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{ءب}$ ، $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{هـجـ}$ ، ء ب = هـ جـ

∵ م ص = م س

∆∆ أ ص م ، أ س م

م أ ضلع مشترك

فيهما م ص = م س



ق (∠ ﺃ س م) = ق (∠ ﺃ ص م) = ٩٠°

∴ Δ ﺃ س م ≡ Δ ﺃ ص م

∴ ﺃ س = ﺃ ص (١)

∵ م س ⊥ ء ب ∴ س منتصف ء ب ∴ ب س = $\frac{١}{٢}$ ء ب

م ص ⊥ هـ جـ ∴ ص منتصف هـ جـ ∴ ص جـ = $\frac{١}{٢}$ هـ جـ

∵ ب ء = هـ جـ ∴ ب س = ص جـ

بجمع ١ ، ٢ ∴ ﺃ س + س ب = ﺃ ص + ص جـ

∴ ﺃ ب = ﺃ جـ

****

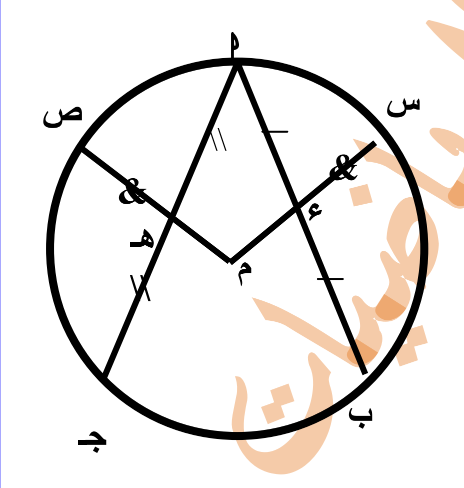
مثــ٨ــال : فى الشكل المقابل ﺃ ب ، ﺃ جـ وتران فى الدائرة م ، ء ، هـ منتصفا ﺃ ب ، ﺃ جـ على الترتيب . م ء ، م هـ يقطعان الدائرة فى س ، ن ، ص على الترتيب فإذا كان ء س = هـ ص إثبت أن ﺃ ب = ﺃ جـ

الحــــــــــــل



∵ ء منتصف ﺃ ب ∴ م ء ⊥ ﺃ ب

∵ هـ منتصف ﺃ جـ ∴ م هـ ⊥ ﺃ جـ



∵ م س = م ص ، س ء = ص هـ

∴ م س – س ء = م ص – ص هـ

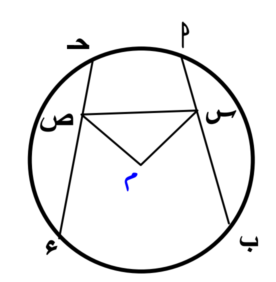
∴ م ء = م هـ

∴ ﺃ ب = ﺃ جـ

****

تمـــــارين

(١) بإستخدام الأشكال المقابلة أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

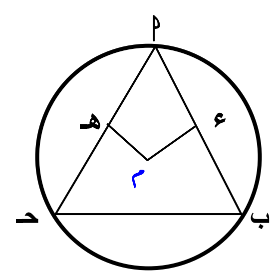


١ – دائرة م ، س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{حـ ء}$

، ق (∠ أ س ص) = ٥٠°

إذا كان : أ ب = حـ ء فإن : ق (∠ س م ص) = ٠٠٠٠٠°

(٥٠° ، ٨٠° ، ١٠٠° ، ١٣٠°)

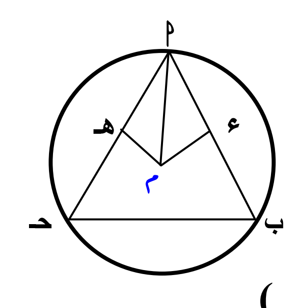


٢ – دائرة م ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{حـ ء}$

، إذا كان : ق (∠ أ) = ٥٠°

فإن : ق (∠ ء م هـ) = ٠٠٠٠٠°

(٥٠° ، ٨٠° ، ١٠٠° ، ١٣٠°)



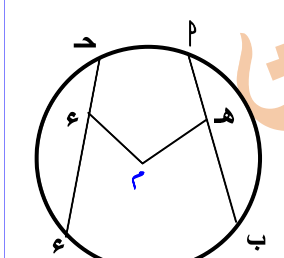
٣ – دائرة م ، أ ب = أ حـ ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{حـ ء}$

، إذا كان : ق (∠ ء أ هـ) = ٦٠°

فإن : ق (∠ ء م أ) = ٠٠٠٠٠°

(٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٢٠°)

(٢) فى الشكل المقابل :

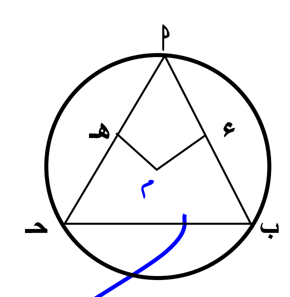


دائرة م ، أ ب = أ حـ ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{حـ ء}$

، م و = ٦ سم ، م هـ = (س + ٢) سم ، حـ ء = (٣ س + ٤) سم

أوجد قيمة : س ، طول $\overline{حـ ء}$

(٣) فى الشكل المقابل :

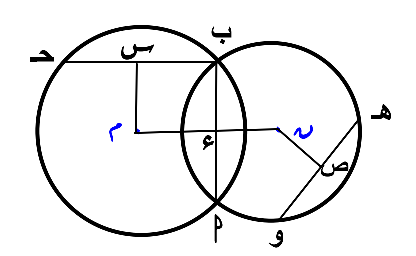


أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م فيه

ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب) ، ء منتصف $\overline{أ ب}$

، $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ أثبت أن : م ء = م هـ

(٤) فى الشكل المقابل :



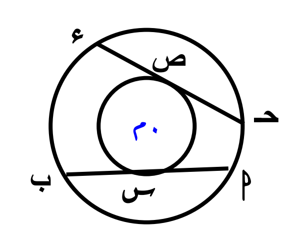
دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب

م ن ∩ أ ب = { ء } ، س منتصف ب حـ

، ن ص ⊥ هـ و ، م س = م ء ، ن ص = ن ء

أثبت أن : ب حـ = هـ و

(٥) فى الشكل المقابل :

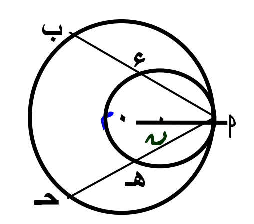


دائرتان متحدا المركز م ، أ ب ؛ حـ ء وتران في الدائرة الكبرى

يمسان الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب

أثبت أن : أ ب = حـ ء

(٦) فى الشكل المقابل :

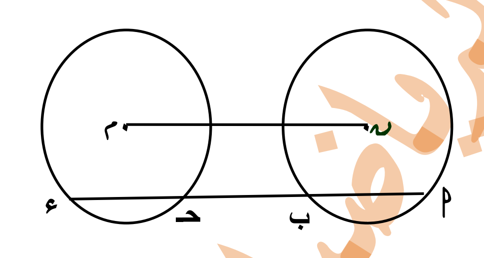


دائرتان م ، ن متماستان من الداخل فى أ ب ، رسم أ ب ، أ حـ

وتران متساويان في الطول في الدائرة الكبرى فقطعا الدائرى الصغرى فى

ء ، هـ على الترتيب أثبت أن : أ ء = أ هـ

(٧) فى الشكل المقابل :



دائرتان م ، ن متطابقتان رسم أ ب // م ن

فقطع الدائرة م فى أ ، ب و قطع الدائرة ن فى حـ ، ء

أثبت أن : أ حـ = ب ء

****

الوحدة الخامسة

الزوايا والأقواس

(١) الزاوية المركزية وقياس الأقواس

(٢) العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية

(٣) الزوايا المحيطية المشتركة فى القوس

(٤) الشكل الرباعى الدائرى

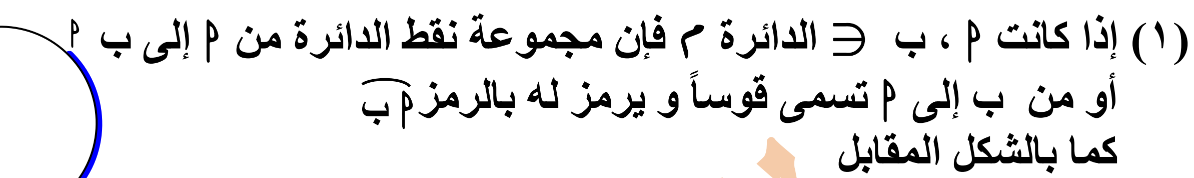
(٥) خواص الرباعى الدائرى

(٦) العلاقة بين المماسات

(٧) الزاوية المماسية

الزاوية المركزية و قياس الأقواس

تمهيد :



(١) إذا كانت ٮ ، ب ∋ الدائرة م فإن مجموعة نقط الدائرة من ٮ إلى ب أو من ب إلى ٮ تسمى قوساً و يرمز له بالرمز ⌒ٮ ب

كما بالشكل المقابل



(٢) فى الشكل المقابل : ضلعا ∠ ٮ م ب يقسمان الدائرة إلى قوسين



١ ـ القوس الأصغر ٮ ب ، و يرمز له بالرمز ⌒ٮ ب

٢ ـ القوس الأكبر ٮ حـ ب ، و يرمز له بالرمز ⌒ٮ حـ ب

٣ ـ مجموعة نقط ⌒ٮ ب تقع داخل ∠ ٮ م ب

٤ ـ مجموعة نقط ⌒ٮ حـ ب تقع داخل ∠ ٮ م ب المنعكسة



الزاوية المركزية :

هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة و يحمل كل من ضليعها نصف قطر فى الدائرة

فى الشكل السابق :



١ ـ ∠ ٮ م ب المركزية يقابلها ⌒ٮ ب

٢ ـ ∠ ٮ م ب المنعكسة يقابلها ⌒ٮ حـ ب

٣ ـ إذا كان $\overline{ٮ ب}$ قطر فى الدائرة م "

أى إذا كانت ∠ ٮ م ب مستقيمة "

فإن : ⌒ٮ ب يطابق ⌒ٮ حـ ب و يسمى كل منهما نصف دائرة



قياس القوس :

هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

* ففى الشكل المقابل :

ں (⌒ٮ ب) = ں (∠ ٮ م ب)

القوسان المتجاوران :

هما قوسان من دائرة يشتركان فى نقطة واحدة فقط

* ففى الشكل المقابل :

⌒ٮ ب ، ⌒حـ ب قوسان من الدائرة م مشتركان نقطة ب

، و يكون : * ⌒ٮ ب + ⌒ب حـ = ⌒ٮ ب حـ

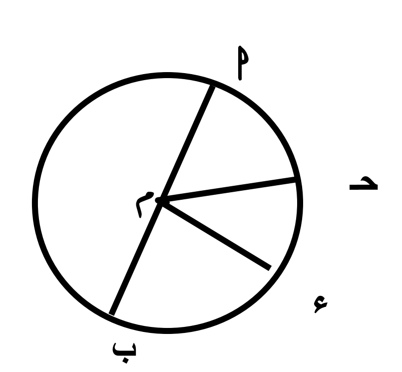
* ⌒ٮ ب حـ − ⌒ٮ ب = ⌒ب حـ



مثـ١ـال : فى الشكل المقابل : $\overline{ﺃﺏ}$ قطر فى الدائرة م
، ق (∠ ب م ء) = ٨٠ ° ، ق (∠ حـ م ء) = ٤٠ °

فيكون :

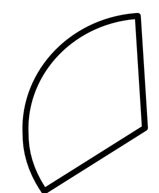
١ – ق ($\frown$ ب ء) = ق (∠ ب م ء) = ٨٠ °
٢ – ق ($\frown$ حـ ء) = ق (∠ حـ م ء) = ٤٠ °
٣ – ق ($\frown$ ﺃ ء) = ق (∠ ﺃ م ء) = ١٠٠ °
٤ – ق ($\frown$ ب حـ) = ق (∠ ب م حـ) = ١٢٠ °
٥ – ق ($\frown$ ﺃ ب) = ق (∠ ﺃ م ب) = ١٨٠ °
٦ – قياس نصف الدائرة = ١٨٠ °
٧ – قياس الدائرة = ٣٦٠ °



****

طول القوس :

** هو جزء من محيط دائرة يتناسب مع قياسه حيث :



** طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة

مثـ٢ـال : أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠ ° فى دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم

الحـــــــل

∵ طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة ________________

∴ طول القوس = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ π نق = $\frac{١}{٣}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٤٤ سم

****

مثـ٣ـال : إوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠ ° من دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم

الحـــــــل

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$ × ٢ ط نق = $\frac{١٢٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٤٤ سم

****

مثــ٤ـال : أوجد طول القوس الذى يمثل رُبع الدائرة التى طول نصف قطرها ١٤سم

الحـــــــل

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠^\circ}$ × ٢ ط نق= $\frac{٩٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٢٢سم

****

مثــ٥ـال : أوجد قياس القوس الذى يمثل خُمسين قياس الدائرة وإذا كان طول نصف قطر هذه الدائرة = ٣٥سم أوجد طول هذا القوس .

الحـــــــل

قياس القوس = $\frac{٢}{٥}$ × ٣٦٠° = ١٤٤°

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠^\circ}$ × ٢ ط نق= $\frac{١٤٤^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣٥ =٨٨ سم

****

مثــ٦ـال : دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ١٤سم ، فإذا كانت ﻫ ، ب نقطتان على الدائرة بحيث ق (∠ ﻫ م ب) = ٤٥° أوجد طول $\overline{\text{ﻫ ب}}$

الحـــــــل

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠^\circ}$ × ٢ ط نق= $\frac{٤٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ١١سم

****

س أكمل

١- قياس القوس الذى طوله ١٢سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٢- قياس القوس الذى طوله ٦ سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٣- قياس القوس الذى طوله ١٨سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٤- قياس القوس الذى طوله ١٦سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٥- قياس القوس الذى طوله ٣ سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٦- قياس القوس الذى طوله ٢٠سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٧- قياس القوس الذى طوله ٢ سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٨- طول الدائرة = ... ، قياس الدائرة = ...

٩ – طول القوس الذى يمثل نصف الدائرة = ...

١٠ ـ طول القوس الذى يمثل خمس الدائرة = ...

١١ ـ طول القوس الذى يمثل ربع الدائرة = ...

١٢ ـ طول القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = ...

١٣ ـ طول القوس الذى يمثل سدس الدائرة = ...

١٤ ـ طول القوس الذى يمثل ثلاث أرباع الدائرة = ...

١٥ ـ طول القوس الذى يمثل خمسين الدائرة = ...

١٦ ـ طول القوس الذى قياسه ١٨٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم

١٧ ـ طول القوس الذى قياسه ٩٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم

١٨ ـ طول القوس الذى قياسه ٢٧٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم

١٩ ـ طول القوس الذى قياسه ٦٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم

٢٠ ـ طول القوس الذى قياسه ١٢٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم

٢١ ـ طول القوس الذى قياسه ٢٤٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم

٢٢ ـ طول القوس الذى قياسه ٣٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم

٢٣ ـ محيط ربع الدائرة = ...

٢٤ ـ محيط نصف الدائرة = ...

٢٥ ـ محيط ثلاث أرباع الدائرة = ...

٢٦ ـ إذا كان أ ب قطر فى الدائرة م فإن ق ($\overset\frown{\text{أ ب}}$) = ...

٢٧ ـ قوس من دائرة طوله ط نق فإن قياسه = ...

٢٨ ـ قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٢}$ ط نق فإن قياس زاويته المركزية = ...

٢٩ ـ الزاوية المركزية التى قياسها ٩٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة

٣٠ ـ الزاوية المركزية التى قياسها ١٨٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة

٣١- الزاوية المركزية التى قياسها ١٢٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة

٣٢- الزاوية المركزية التى قياسها ٦٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة

٣٣- الزاوية المركزية التى قياسها ٣٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة

٣٤- الزاوية المركزية التى قياسها ٢٤٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة

٣٥- الزاوية المركزية التى قياسها ٤٥° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة

****

نتائج هامة :

(١) فى الدائرة الواحدة (أو الدائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول و العكس صحيح

(٢) فى الدائرة الواحدة (أو الدائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول و العكس صحيح

(٣) الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس

(٤) القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس

****

فى الشكل المقابل نلاحظ :

(١) إذا كان : ى (⌒أ حـ) = ى (⌒ب ء) فإن : طول ⌒أ حـ = طول ⌒ب ء

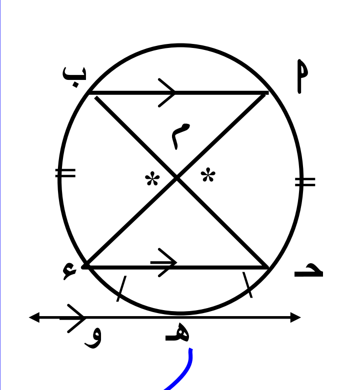
و بالعكس_ إذا كان : طول ⌒أ حـ = طول ⌒ب ء

فإن : ى (⌒أ حـ) = ى (⌒ب ء)

(٢) إذا كان : ى (⌒أ حـ) = ى (⌒ب ء) فإن : طول $\overline{\text{أ حـ}}$ = طول $\overline{\text{ب ء}}$

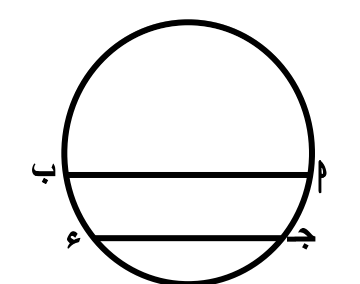
و بالعكس　إذا كان : طول $\overline{\text{أ حـ}}$ = طول $\overline{\text{ب ء}}$

فإن : ى (⌒أ حـ) = ى (⌒ب ء)



(٣) إذا كان : $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ فإن : ى (⌒أ حـ) = ى (⌒ب ء)

(٤) إذا كان: $\overline{\text{حـ ء}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ فإن : ى (⌒حـ هـ) = ى (⌒هـ ء)

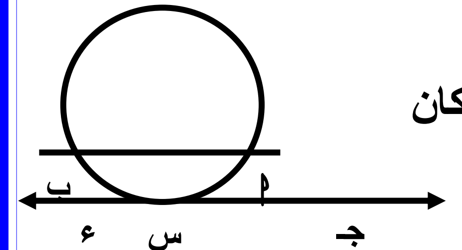


مثــ٧ــال : فى الشكل المقابل

إذا كان م ب // جـ ء ، ق(أ ب) = ١٥٠ °

ق (م جـ) = ٥٠ ° فإن ق (جـ ء) = ...

****



مثــ٨ــال : فى الشكل المقابل

إذا كان م ب // جـ ء ، حيث جـ ء يمس الدائرة م فى س فإذا كان

ق (م ب) = ٢٠٠ ° فإن

ق (م س) = ... ، ق (س ب) = ...

****

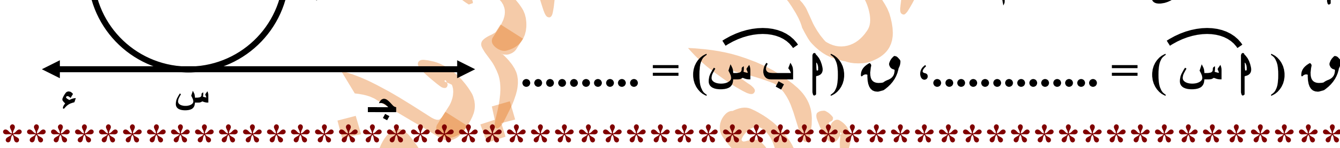
مثــ٩ــال : فى الشكل المقابل



إذا كان م ب // جـ ء ، حيث جـ ء يمس الدائرة م فى س فإذا كان



م ب قطر فى الدائرة م



ق (م س) = ... ، ق (م ب س) = ...

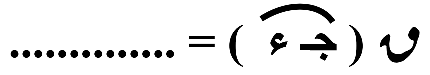
****

مثــ١٠ــال : فى الشكل المقابل

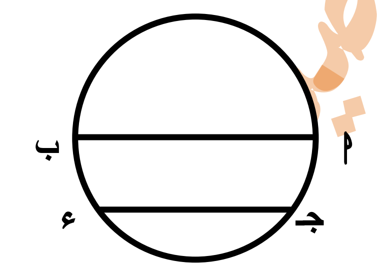


إذا كان م ب // جـ ء ، حيث م ب قطر فى الدائرة م

ق (م جـ) = ٥٠ ° فإن

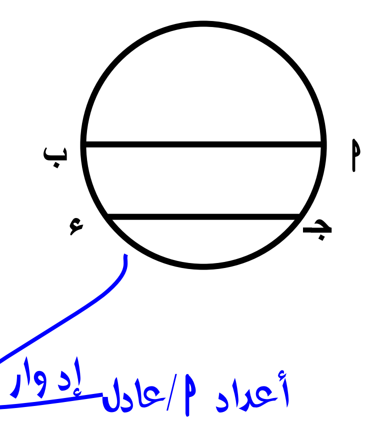


ق (جـ ء) = ...



****

مثــ١١ــال : فى الشكل المقابل

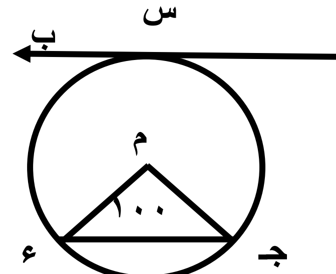


إذا كان م ب // جـ ء ، م ب قطر فى الدائرة م

ق (جـ ء) = ٨٠ ° فإن

ق (م جـ) = ...

مثـال ١٢ : فى الشكل المقابل



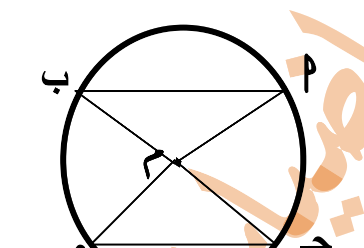
إذا كان أ ب // جـ ء ، أ ب = جـ ء

ق (أ جـ) = ١١٠° فإن

ق (أ ب) = ... ، ق (ء ب) = ... ، ق (جـ ء) = ...

****

مثـال ١٣ : فى الشكل المقابل



إذا كان أ ب // جـ ء ، حيث أ ب مماس للدائرة عند س

ق (∠ جـ م ء) = ١٠٠° فإن

ق (س جـ) = ... ، ق (جـ ء) = ... ، ق (س ء) = ...

****

مثـال ١٤ : في الشكل المقابل : أ ب ، حـ ء وتران متوازيان فى الدائرة م

، ق (∠ أ م حـ) = ٦٥° ، ق (حـ ء) = ١٠٠° أوجد ق (أ ب)

الحـــــل

المعطيات : أ ب // حـ ء ، ق (∠ أ م حـ) = ٦٥° ، ق (حـ ء) = ١٠٠°

المطلوب : إيجاد ق (أ ب)

البرهـان : ∵ ق (∠ أ م حـ) = ٦٥°

∴ ق (أ حـ) = ٦٥°

∵ أ ب // حـ ء

∴ ق (أ حـ) = ق (ب ء) = ٦٥°

∴ ق (أ حـ) + ق (ب ء) + ق (حـ ء) = ٦٥° + ٦٥° + ١٠٠° = ٢٣٠°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

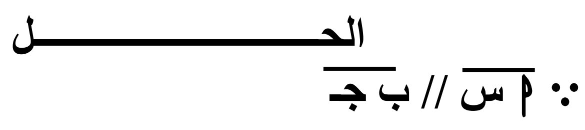
∴ ق (أ ب) = ٣٦٠° − ٢٣٠° = ١٣٠°

****



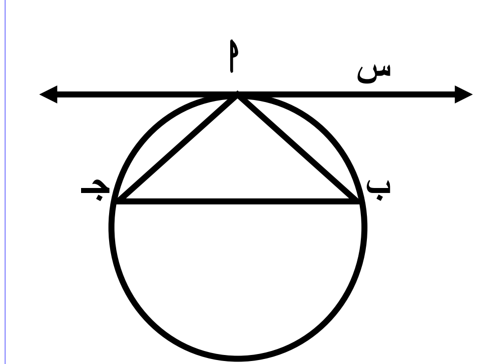
مثـال ١٥ : فى الشكل المقابل : أ س مماس للدائرة عند أ ، ب جـ // أ س

ق (∠ب) = ٥٠° أوجد : ق (∠ب أ جـ)



الحـــــــــــــــل

∵ أ س // ب جـ



∴ ق (⌒أ ب) = ق (⌒أ جـ)

∴ أ ب = أ جـ

∴ ق (∠ب) = ق (∠جـ) = ٥٠°

∴ ق (∠ب أ جـ) = ١٨٠° ـ [٥٠+٥٠] = ١٨٠ ـ ١٠٠ = ٨٠°

****

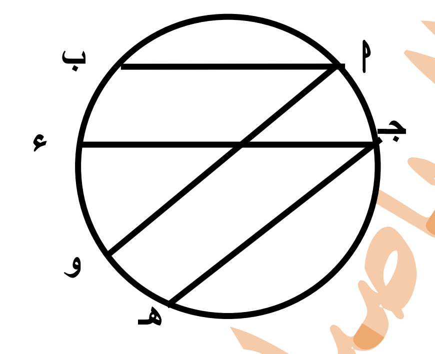
مثـال ١٦ : فى الشكل المقابل : أ ب // جـ ء ، أ و // جـ هـ

إثبت أن : ق (⌒ب ء) = ق (⌒هـ و)



الحـــــــــــــــل

∵ أ ب // جـ ء



∴ ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ب ء) (١)

∵ أ و // جـ هـ

∴ ق (⌒أ جـ) = ق (⌒هـ و) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (⌒ب ء) = ق (⌒هـ و)

****

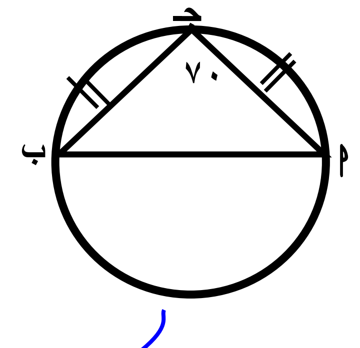
مثـال ١٧ : فى الشكل المقابل إذا كان : ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ب جـ)



، ق (∠أ جـ ب) = ٧٠° أوجد ق (∠أ ب جـ)



الحـــــــــــــــل

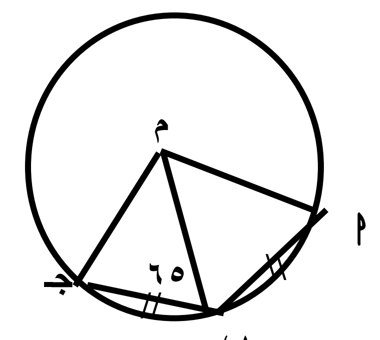


∵ ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ب جـ) ∴ أ جـ = ب جـ

∴ ق (∠أ) = ق (∠ب) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢} = \frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

مثـ١٨ــال : فى الشكل المقابل إذا كانت دائرة م فيها : ق (⌒أ ب) = ق (⌒ب جـ)

ق (∠م ب جـ) = ٦٥° أوجد : ق (⌒أ ب)



الحـــــــــــــــل

فى Δ م ب جـ   م ب = م جـ

∴ ق (∠م ب جـ) = ق (∠م جـ ب) = ٦٥°

∴ ق (∠ب م جـ) = ١٨٠° – [٦٥+٦٥] = ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠°

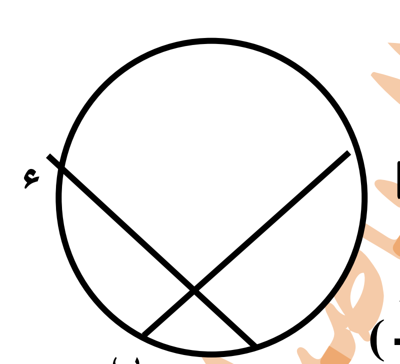
∴ ق (⌒ب جـ) = ق (∠ ب م جـ) = ٥٠°

ق (⌒أ ب) = ق (⌒ب جـ)   ∴ ق (⌒أ ب) = ٥٠°

****

مثـ١٩ــال : فى الشكل المقابل : أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م

أ ب = جـ ء   إثبت أن : ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ب ء)



الحـــــــــــــــل

∵ أ ب = جـ ء   ∴ ق (⌒أ ب) = ق (⌒جـ ء)

بطرح ق (⌒ب جـ) من الطرفين

ق (⌒أ ب) –ق (⌒ب جـ) = ق (⌒جـ ء) –ق (⌒ب جـ)

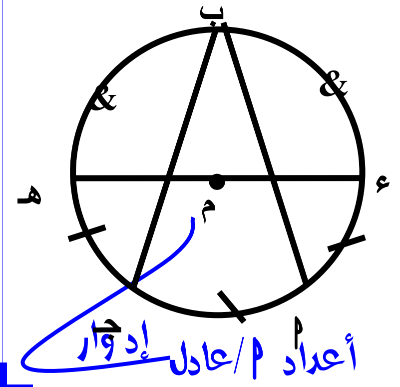
∴ ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ب ء) [وهو المطلوب إثباته]

فى الشكل المقابل

****

مثـ٢٠ــال:ء هـ قطر فى الدائرة م ، ب منتصف ⌒ء ب طول ⌒ء أ = طول ⌒أ جـ = طول ⌒جـ هـ

أوجد : ق (∠أ ء ب)



الحـــــــــــــــل

∵ء هـ قطر   ∴ ق (⌒أ ء) + ق (⌒أ هـ) = ١٨٠°

∴ ق (⌒أ ء) = ق (⌒أ هـ) = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

∵ ء هـ قطر ∴ ق (⌒ء أ) + ق (⌒أ جـ) + ق (⌒جـ هـ) = ١٨٠°

ق (⌒ء أ) = ق (⌒أ جـ) = ق (⌒جـ هـ) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

ق (⌒أ ء ب) = ق (⌒أ ء) + ق (⌒ء ب) = ٦٠+٩٠ = ١٥٠°

****

مثـــ٢١ـــال : فى الشكل المقابل : أ ب قطر فى الدائرة م

ق (⌒أ جـ) = ق (⌒جـ ء) = ق (⌒ء ب) إثبت أن Δ أ جـ ء متساوى الاضلاع

الحـــــــــل

∵ ق (⌒أ جـ) + ق (⌒جـ ء) + ق (⌒ء ب) = ١٨٠° [وهما متساويين]

∴ ق (⌒أ جـ) = ق (⌒جـ ء) + ق (⌒ء ب) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

∴ ق (∠جـ م ء) = ق (⌒جـ ء) = ٦٠°

فى Δ م جـ ء ∵ م جـ = م ء

∴ ق (∠م جـ ء) = ق (∠ م ء جـ) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

∴ ق (∠جـ م ء) = ق (∠م جـ ء) = ق (∠ م ء جـ)

∴ Δ م جـ ء متساوى الاضلاع

****

مثـــ٢٢ـــال : فى الشكل المقابل أ ب جـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة ، ء هـ = ء جـ

إثبت أن : ب هـ = أ ء

الحـــــــــل

∵ ء هـ = ء جـ (١) ∵ من خواص المستطيل أ ب = ء جـ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ء هـ = أ ب

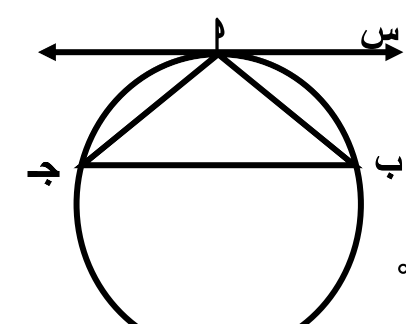
∴ ق (⌒ء هـ) = ق (⌒أ ب)

بأضافة ق (⌒أ هـ) للطرفين

∴ ق (⌒ء هـ) + ق (⌒أ هـ) = ق (⌒أ ب) + ق (⌒أ هـ)

∴ ق (⌒أ ء) = ق (⌒ب هـ) ∴ أ ء = ب هـ

مثـال ٢٣ : فى الشكل المقابل ٢ س مماس للدائرة عند ٢ ، ب جـ // ٢ س ، ق (∠ب) = ٣٥° أوجد ق (∠ب ٢ جـ)



الحــــــــــل

∵ ٢ س // ب جـ ∴ ق (⌒٢ ب) = ق (⌒٢ جـ)

∴ ٢ ب = ٢ جـ ∴ ق (∠ب) = ق (∠جـ) = ٣٥°

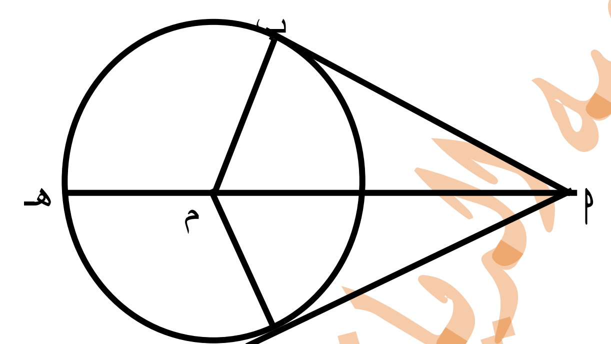
∴ ق (∠ب ٢ جـ) = ١٨٠° – [٣٥ + ٣٥] = ١٨٠° – ٧٠ = ١١٠°

****

مثـال ٢٤ : فى الشكل المقابل ٢ ب ، ٢ جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ

إثبت أن ق (⌒ب هـ) = ق (⌒جـ هـ)

الحــــــــــل



∵ ٢ ب مماس ∴ ق (∠٢ ب م) = ٩٠°

∵ ٢ جـ مماس ∴ ق (∠٢ جـ م) = ٩٠°

فى ΔΔ ٢ ب م ، ٢ جـ م

فيهما
- ٢ م ضلع مشترك
- م ب = م جـ
- ق (∠ ٢ ب م) = ق (∠٢ جـ م) = ٩٠°

∴ Δأ ب م ≡ Δ ٢ جـ م

∴ ق (∠ ٢ م ب) = ق (∠ ٢ جـ م)

∴ ق (∠ب م هـ) = ق (∠جـ م هـ) (١)

ق (⌒ب هـ) = ق (∠ب م هـ) (٢)

ق (⌒جـ هـ) = ق (∠جـ م هـ) (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن : ق (⌒ب هـ) = ق (⌒جـ هـ)

مثـ٢٥ـال : ٢ ، ب ، جـ ثلاث نقط تنتمى الى الدائرة م فإذا كان

ق (٢ ب⌒) : ق (ب جـ⌒) : ق (جـ ٢⌒) = ٣ : ٤ : ٥

أوجد قياس كلا من الاقواس الثلاثة .

الحـــــــــــــل

نفرض أن ق (٢ ب⌒) = ٣س ، ق (ب جـ⌒) = ٤ س ، ق (جـ ٢⌒) = ٥ س

∵ ق (٢ ب⌒) + ق (ب جـ⌒) + ق (جـ ٢⌒) = ٣٦٠ °

٣س +٤ س + ٥ س = ٣٦٠ ∴ ١٢س = ٣٦٠ ∴ س = $\frac{٣٦٠}{١٢}$ = ٣٠ °

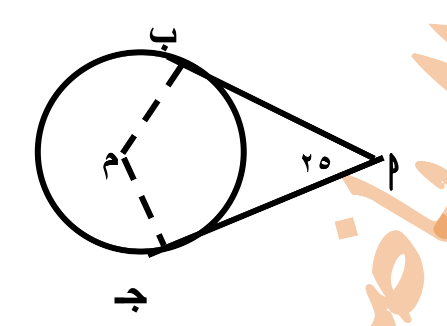
∴ ق (٢ ب⌒) = ٣ × ٣٠ = ٩٠ ° ، ∴ ق (ب جـ⌒) = ٤ × ٣٠ = ١٢٠ °

∴ ق (جـ ٢⌒) = ٥ × ٣٠ ° = ١٥٠ °

****

مثـ٢٦ـال : ٢ ب ، ٢ جـ قطعتان مماستان لدائرة مركزها م عند ب ، جـ ،

ق (∠ ب ٢ جـ) = ٢٥ ° أوجد ق (ب جـ⌒) الاكبر



الحـــــــــــل

∵ ٢ ب مماس ∴ ق (∠٢ ب م) = ٩٠°

∵ ٢ جـ مماس ∴ ق (∠٢ جـ م) = ٩٠°

∴ ق (∠ ب م جـ) = ٣٦٠° – [٩٠° +٩٠° +٢٥°] = ٣٦٠° ـ ٢٠٥° =١٥٥°

∴ ق (∠ب م جـ) المنعكسة = ٣٦٠° ـ ق (∠ ب م جـ) =٣٦٠° ـ ١٥٥° = ٢٠٥°

ق (ب جـ⌒) الاكبر = ق(∠ب م جـ) المنعكسة = ٢٠٥°

****

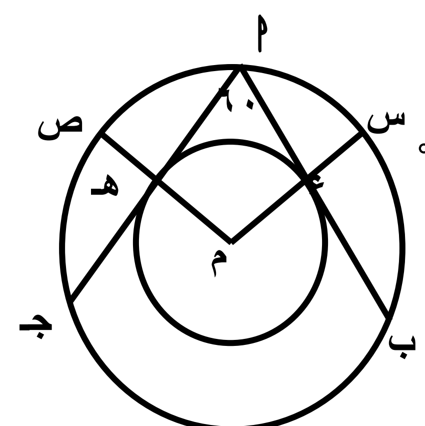
مثـ٢٧ـال دائرتان متحدتا المركز م وطولا نصفى قطريهما ٢سم ، ٤سم ، ٢ ب ، ٢جـ

تمسان الدائرة الصغرى فى ء ، هـ ، رسم م ء ، م هـ فقطعا الدائرة الكبرى

فى س ، ص على الترتيب فإذا كان ق (∠ ب ٢ جـ) = ٦٠° أوجد

(١) ق (ء هـ⌒) ، طول (ء هـ⌒) (٢) ق(س ب ص⌒) ، طول (س ب ص⌒)

الحــــــــــل



∵ أب مماس للدائرة الصغرى ∴ ق (∠ أ ء م) = ٩٠°

∵ أ جـ مماس للدائرة الصغرى ∴ ق (∠ أ هـ م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى أ ء م هـ = ٣٦٠°

∴ ق (∠ ء م هـ) = ٣٦٠° – [٩٠° +٩٠° +٦٠°]

= ٣٦٠° – ٢٤٠° = ١٢٠°

∴ ق (ء⌒هـ) = ق (∠ء م هـ) = ١٢٠°

∴ طول (ء⌒هـ) = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$ × ٢ ط نق = $\frac{١٢٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × ط × ٢ = $\frac{٤}{٣}$ ط

∵∴ ق (∠س أ ص) = ق (∠س م ص) = ١٢٠°

∴ ق (س⌒ب ص) = ٣٦٠° – ق (س⌒م ص) = ٣٦٠° – ١٢٠° = ٢٤٠°

طول (س⌒ب ص) = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$ × ٢ ط نق = $\frac{٢٤٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × ط × ٤ = $\frac{١٦}{٣}$ ط

****

مثــ٢٨ــال : إذا كان أ ، ب نقطتين تنتميان للدائرة م وكان

ق (∠أ م ب) = $\frac{١}{٤}$ ق (∠أ م ب المنعكسة) أوجد ق (أ⌒ب)

الحــــــــــل

بفرض أن ق (∠أ م ب) = س ، ق (∠أ م ب المنعكسة) = ٤س

∵ ق (∠أ م ب) + ق (∠أ م ب المنعكسة) = ٣٦٠°

∴ س +٤ س = ٣٦٠° ∴ ٥س = ٣٦٠°

∴ س = $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢° ∴ ق (أ⌒ب) = ق (∠ أ م ب) = ٧٢°

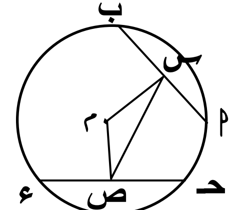
****

تمارين

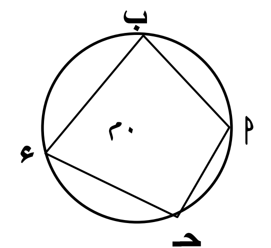
(١) أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٣٠٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٤٢ سم

(٢) أوجد قياس قوس من دائرة محيطها ٣٦ سم إذا كان طول هذا القوس ٦ سم

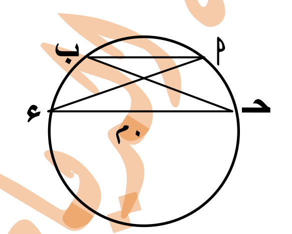
(٣) أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{٢}{٥}$ قياس الدائرة ثم أوجد طوله إذا كان نصف قطر الدائرة ٣٥ سم فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم ، س ء = ٢ سم



(٤) فى الشكل المقابل :
طول أ ب = طول ⌒ حـ ء ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ حـ ء
أثبت أن : ق (∠ م س ص) = ق (∠ م ص س)



(٥) فى الشكل المقابل :
دائرة م فيها أ ب = أ ء ، ء حـ = ب حـ
أثبت أن : أ حـ قطر فى الدائرة م



(٦) فى الشكل المقابل :
دائرة م فيها أ ب // حـ ء
أثبت أن : [١] أ حـ = ب ء
[٢] أ ء = ب حـ

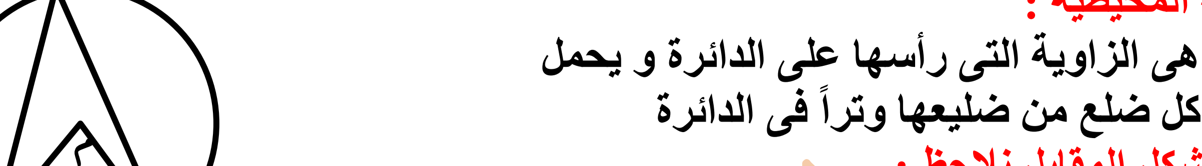
(٧) فى الشكل المقابل :
دائرة م فيها حـ ء مماس لها عند س ، حـ ء // أ ب
، س ص ⊥ أ ب أثبت أن : [١] ص منتصف أ ب
[٢] س ص يمر بمركز الدائرة م [٣] ق (⌒ أ ع) = ق (⌒ ب ع)

(٨) أ ، ب ، حـ ثلاث نقط على دائرة بحيث ⌒ أ ب : ⌒ ب حـ : ⌒ حـ أ = ١ : ٢ : ٣ فإذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٨ سم أوجد طول ⌒ أ ب حـ

(٩) أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فإذا كان أ ب // حـ ء أثبت أن أ حـ = ب ء ، إذا كان س منتصف ⌒ ء حـ أثبت أن أ س = ب س

(١٠) س ص قطر فى دائرة م ، أ ب وتر فى الدائرة عمودى على س ص أثبت أن : س ، ص منتصفا القوسين الأصغر و الأكبر على الترتيب الناتجان من تقسيم أ ب للدائرة

الزاوية المركزية و قياس الأقواس

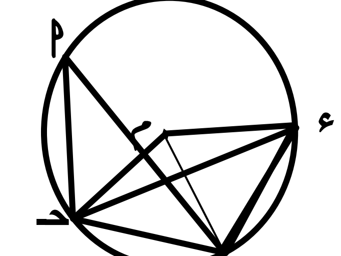


الزاوية المحيطية :

هى الزاوية التى رأسها على الدائرة و يحمل
كل ضلع من ضلعيها وتراً فى الدائرة

ففى الشكل المقابل نلاحظ :

* ∠ أ حـ ب زاوية محيطية ، $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ هو القوس المقابل لها
* لكل زاوية محيطية توجد زاوية مركزية واحدة تشترك معها فى القوس
* لكل زاوية مركزية توجد أكثر من زاوية محيطية تشترك معها فى القوس



تدريب (١) : فى الشكل المقابل أوجد :

[١] زاويتان محيطيتان و أذكر القوس المقابل لكل منهما

[٢] زاويتان مركزيتان و أذكر القوس المقابل لكل منهما

[٣] زاوية مركزية و أخرى محيطية مشتركتان فى القوس $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$

[٤] بإستخدام المنقلة أوجد قياس كل من الزاويتان السابق ذكرهما فى [٣]

[٥] أستنتج العلاقة بين قياس كل من الزاويتان السابق ذكرهما فى [٣]

****

نـظريـة : قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

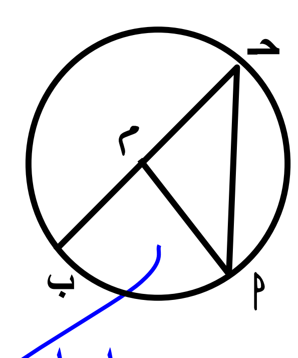
المعطيات : ∠ أ حـ ب زاوية محيطية ، ∠ أ م ب زاوية مركزية فى دائرة م

المطلوب : ق (∠ أ حـ ب) = ½ ق (∠ أ م ب)

البرهان : توجد ثلاث حالات لإثبات صحة النظرية :

(١) إذا كانت م تنتمى لأحد ضلعى الزاوية المحيطية

(٢) إذا كانت م نقطة داخل الزاوية المحيطية



(٣) إذا كانت م نقطة خارج الزاوية المحيطية

الحالة الأولى : إذا كانت م تنتمى لأحد ضلعى الزاوية المحيطية

∵ ∠ ٵ م ب خارجة عن Δ ٵ م حـ

∴ ق (∠ ٵ م ب) = ق (∠ ٵ) + ق (∠ حـ) (١)

، ∵ ٵ م = م حـ = نق ∴ ق (∠ ٵ) = ق (∠ حـ) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ق (∠ ٵ م ب) = ٢ ق (∠ حـ)

∴ ق (∠ ٵ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٵ م ب)

****

ملاحظة:

قياس الزاوية المركزية = ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

نتائج :

(١) قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

(٢) الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة

فى الشكل المقابل :

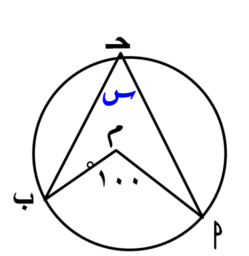
ق (∠ ٵ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٵ م ب) = $\frac{1}{2}$ × ١٨٠ = ٩٠°

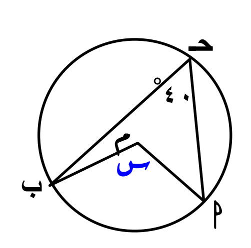
(٣) الزاوية المحيطية تقابل قوساً أقل من نصف دائرة تكون حادة

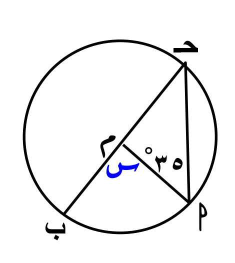
(٤) الزاوية المحيطية تقابل قوساً أكبر من نصف دائرة تكون منفرجة

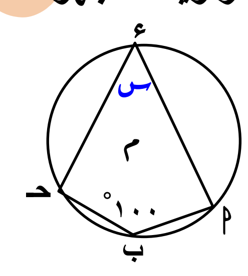
****

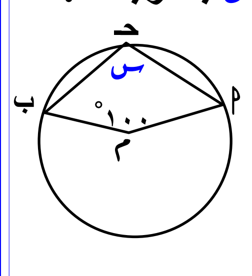
تدريب (٢) : فى الأشكال الآتية إذا كان م مركز دائرة أوجد قياس الزاوية المجهولة س بالدرجات :





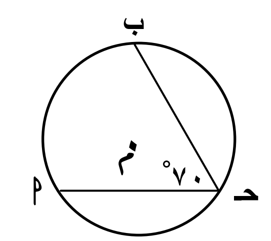


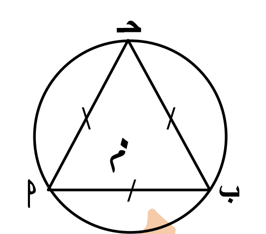


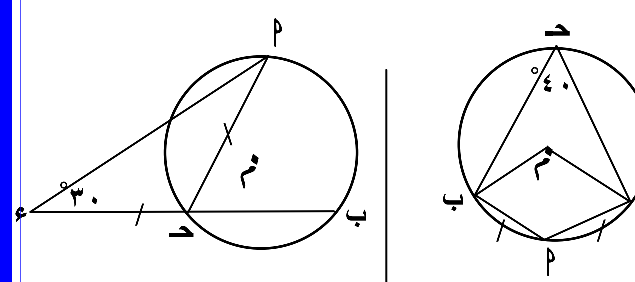


س = ... °   س = ... °   س = ... °   س = ... °   س = ... °

تدريب (٣) : فى الأشكال الآتية أكمل :

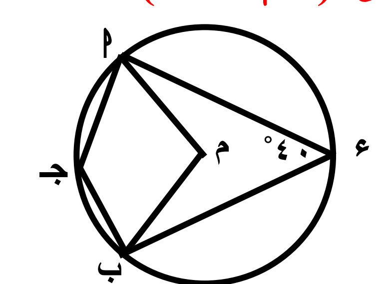






ق (أ ب) = ... °   ق (أ ب) = ... °   ق (أ ب) = ... °   ق (أ ب) = ... °

مثـال١ : فى الشكل المقابل إذا كان ق (∠أ ء ب) = ٤٠ ° أوجد ق (∠أ جـ ب)



الحـــل

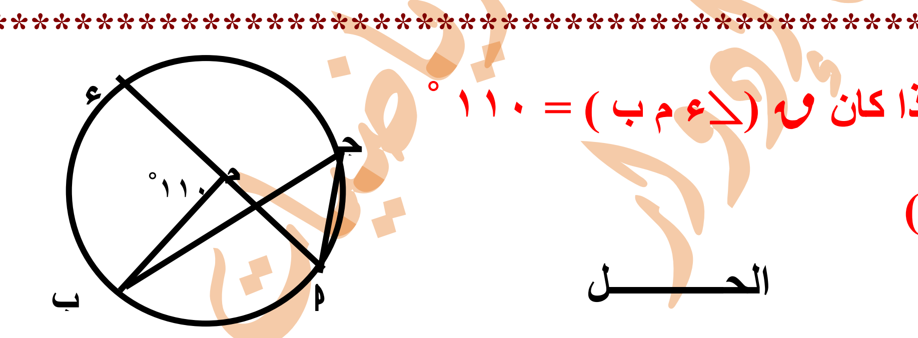
∵ ق (∠أ م ب) = ٢ ق (∠ ء) = ٢ × ٤٠ ° = ٨٠ °

∴ ق (∠أ م ب) المنعكسة = ٣٦٠ ° − ٨٠ ° = ٢٨٠ °

∴ ق (∠أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠أ م ب) المنعكسة = $\frac{1}{2}$ × ٢٨٠ ° = ١٤٠ °

مثـال٢ : فى الشكل المقابل إذا كان ق (∠ء م ب) = ١١٠ °

أوجد ق (∠أ جـ ب)



الحـــل

∵ ق (∠أ م ب) + ق (∠ء م ب) = ١٨٠ °

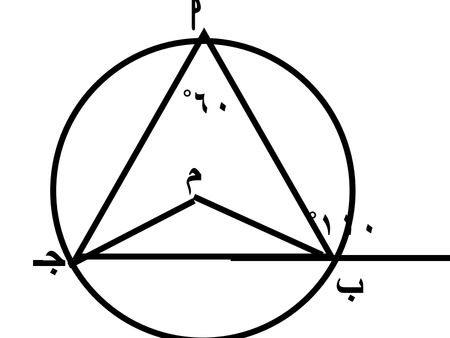
∴ ق (∠ أ م ب) = ١٨٠ ° − ١١٠ ° = ٧٠ °

∴ ق (∠أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ب) = $\frac{1}{2}$ × ٧٠ ° = ٣٥ °

مثـال٣ : فى الشكل المقابل ق (∠أ ب ء) = ١١٠ ° ، ق (∠ب أ جـ) = ٦٠ °

أوجد ق (∠أ ب م)

الحـــــــــــــــــــــل



ق (∠ب م جـ) = ٢ ق (∠أ) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

فى △ ب م جـ ∵ م ب = م جـ

∴ ق (∠م ب جـ) = ق (∠م جـ ب) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°

∵ ق(∠ء ب أ) + ق(∠أ ب جـ) = ١٨٠°

[متجاورتان من تقاطع مستقيم وشعاع] ∴ ق (∠أ ب جـ) = ١٨٠ – ١١٠ = ٧٠°

∴ ق (∠أ ب م) = ٧٠ – ٣٠ = ٤٠°

****

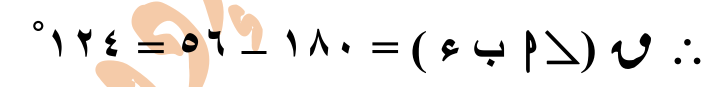
مثـــال ٤ : فى الشكل المقابل م دائرة ، ق (∠أ م جـ) = ١١٢° ، أب = ء ب

أوجد ق (∠ ء)

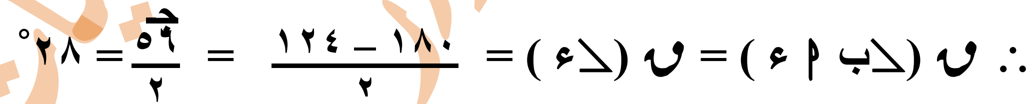
الحــــــــــــل

∵ ق (∠أ ب م) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠أ م جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١١٢ = ٥٦°


∵ ق (∠أب جـ) + ق (∠أب ء) = ١٨٠°


∴ ق (∠أ ب ء) = ١٨٠ – ٥٦ = ١٢٤°

فى △أب ء ∵ أ ب = ب ء

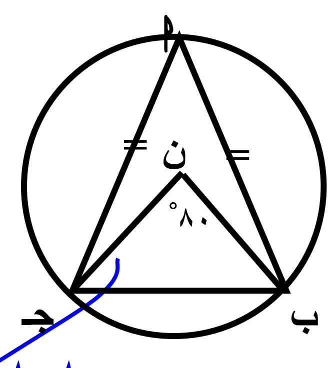

∴ ق (∠ب أ ء) = ق (∠ء) = $\frac{١٨٠ – ١٢٤}{٢}$ = $\frac{٥٦}{٢}$ = ٢٨°

****


مثـــال ٥ : فى الشكل المقابل دائرة ن فيها أب = أ جـ ، ق (∠ب ن جـ) = ٨٠°

أوجد ق (∠أ ب جـ) ، ق (ب جـ⌢) الاكبر

الحــــــــــــل



∵ ق (∠ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ب ن جـ)

[محيطية ومركزية] ∴ ق (∠ب أ جـ) = ٤٠°

∵ ا ب = ا جـ

∴ ق (∠ا ب جـ) = ق (∠ ا جـ ب) = $\frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠° وهو المطلوب أولاً

∵ ق (⌒ب جـ) الاصغر = ق (∠ ب ن جـ) = ٨٠ °

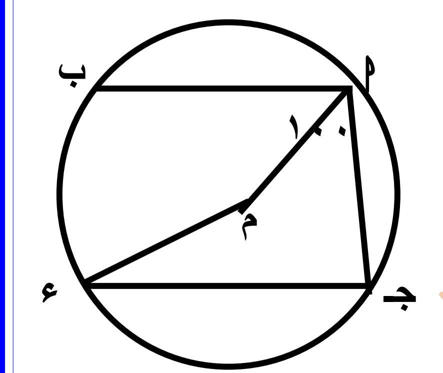
∴ ق (⌒ب جـ) الاكبر = ٣٦٠° ــ ٨٠ ° = ٢٨٠ °

****

مثــ٦ـال : فى الشكل المقابل ا ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م ، ق (∠ ب اجـ) = ١٠٠ ° ،

$\overline{ا ب}$ // $\overline{جـ ء}$ أوجد ق (∠ا م ء)

الحـــــــــل



∵ $\overline{ا ب}$ // $\overline{جـ ء}$



∴ ق (∠ا جـ ء) + ق (∠جـ ا ب) = ١٨٠

[داخليتان وفى جهة واحدة من القاطع]

∴ ق (∠ا جـ ء) = ١٨٠ ــ ١٠٠ = ٨٠ °

∴ ق (∠ا م ء) = ٢ ق (∠اجـ ء) = ٢ × ٨٠ = ١٦٠ °

****

مثــ٧ـال : فى الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، ا ب جـ مثلث متساوى الاضلاع أوجد : ق (∠ ب م جـ)

الحـــــــــل

∵ اب جـ مثلث متساوى الاضلاع

∴ ق (∠اب جـ) = ق (∠ا جـ ب) = ق (∠ب ا جـ) = ٦٠ °

∵ ق (∠ب م جـ) = ٢ ق (∠ ب اجـ) [محيطية ومركزية مشتركتان فى القوس]

∴ ق (∠ ب م جـ) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠ °

****

مثـــال ٨ : فى الشكل المقابل : ﺃ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ، ق(∠ﺃ م ب) = ٩٠° ، ق (∠ ب م جـ) = ٦٠° أوجد قياسات زوايا المثلث ﺃ ب جـ



الحـــــل

∵ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°

∴ ق (∠ﺃ م جـ) = ٣٦٠° – [٩٠ + ٦٠] = ٣٦٠ – ١٥٠ = ٢١٠°

∴ ق (∠ب ﺃ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ب م جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠ = ٣٠°

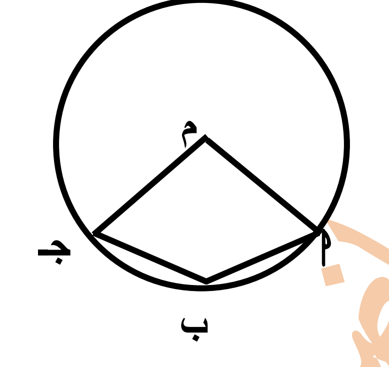
∴ ق (∠ﺃ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ﺃ م جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٢١٠ = ١٠٥°

∴ ق (∠ﺃ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ﺃ م ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٩٠ = ٤٥°

****

مثـــال ٩ : فى الشكل المقابل إذا كان م مركز الدائرة ق (∠ﺃ م جـ) = ق (∠ب)

أوجد : ق (∠ب)



الحـــــل

ق (∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (ﺃ جـ⌢)

∴ ق (∠ﺃ م جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (ﺃ ب جـ⌢)

∴ ق (∠ﺃ م جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ب⌢)

بفرض أن : ق (ﺃ جـ⌢) الاكبر = ٢ س　　　∴ ق (ﺃ ب جـ⌢) = س

∴ ق (ﺃ ب جـ) + ق (ﺃ جـ⌢) = ٣٦٠

∴ س + ٢ س = ٣٦٠°　　∴ ٣س = ٣٦٠°　　∴ س = ١٢٠°

∴ ق (ﺃ ب جـ) = ق (ﺃ جـ⌢)

∴ ق (أ جـ⌢) الاكبر = ٢ س = ٢ × ١٢٠ = ٢٤٠°

∴ ق (ب⌢) = ق (ﺃ جـ⌢) = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤٠ = ١٢٠°

مثـ١٠ـال : فى الشكل المقابل أوجد ق (∠ ٲ ب م)

الحـــــــل

∵ $\overline{ٲحـ}$ قطر فى الدائرة م

∴ ق (∠ ٲ ب حـ) = ٩٠°

فى Δ ٲ ب حـ : ق (∠ ب ٲ حـ) + ق (∠ ب حـ ٲ) = ٩٠°

∴ ٤ س + س = ٩٠° ∴ ٥ س = ٩٠° ∴ س = ١٨°

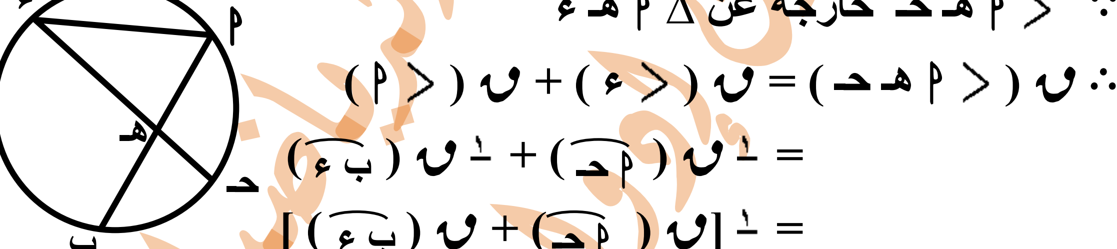
∴ ق (∠ ب ٲ م) = ٤ × ١٨ = ٧٢°

∴ Δ ٲ ب م متساوى الساقين

∴ ق (∠ ب ٲ م) = ق (∠ ٲ ب م) = ٧٢°

****

تمرين مشهور (١) : إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياس القوسين المقابلين لها



المعطيات : $\overline{ٲب}$ ∩ $\overline{حـ ء}$ = { هـ }

المطلوب : ق (∠ ٲ هـ حـ) = ½ [ق ($\frown{ٲحـ}$) + ق ($\frown{ب ء}$)]

العمــــل : نرســـــــم $\overline{ٲء}$

البرهان : ∵ ∠ ٲ هـ حـ خارجة عن Δ ٲ هـ ء

∴ ق (∠ ٲ هـ حـ) = ق (∠ ء) + ق (∠ ٲ)

= ½ ق ($\frown{ٲحـ}$) + ½ ق ($\frown{ب ء}$)

= ½ [ق ($\frown{ٲحـ}$) + ق ($\frown{ب ء}$)]

****

تمرين مشهور (٢) : إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين فى دائرة خارجها فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية

المعطيات : $\overleftarrow{ٲب}$ ∩ $\overleftarrow{حـ ء}$ = { هـ }

المطلوب : ق (∠ ٲ هـ حـ) = ½ [ق ($\frown{ٲحـ}$) − ق ($\frown{ب ء}$)]

العمــــل : نرســـــــم $\overline{ب حـ}$

البرهان : ∵ ∠ ٲ ب حـ خارجة عن Δ هـ ب حـ

∴ ق (∠ ٲ ب حـ) = ق (∠ ب حـ هـ) + ق (∠ هـ)

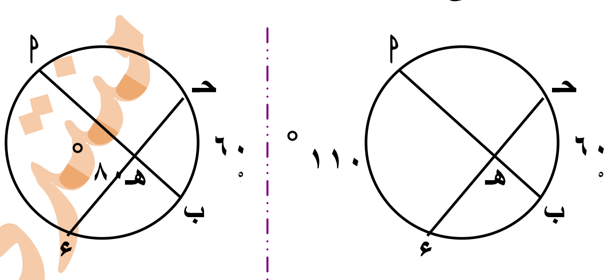
∴ ق (∠ هـ) = ق (∠ أ ب حـ) − ق (∠ ب حـ هـ)

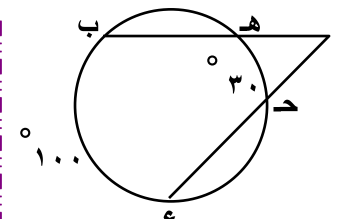
∴ ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أ حـ) − $\frac{1}{2}$ ق (⌒ب ء)

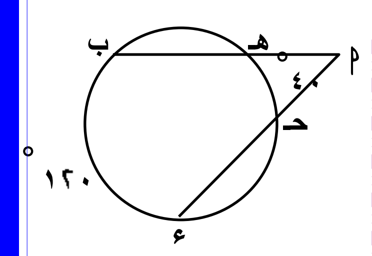
= $\frac{1}{2}$ [ق (⌒أ حـ) − ق (⌒ب ء)]

****

تدريب : فى الأشكال الآتية إذا كان م مركز دائرة أكمل :







ق (∠ أ هـ ء) = ... ° ق (⌒أ ء) = ... ° ق (∠ ب أ ء) = ... ° ق (⌒حـ هـ) = ...

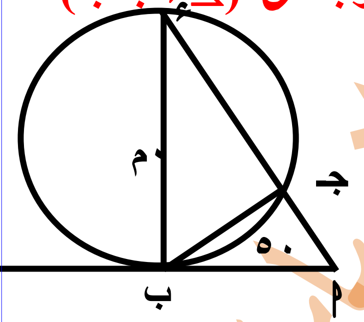
****

مثــ١ــال : فى الشكل المقابل ء ب قطر فى الدائرة م ، أ ب يمس الدائرة م عند ب

، أ ء يقطع الدائرة فى جـ ، ق (∠جـ أ ب) = ٥٠° أوجد ق (∠ء ب جـ)



الحــــــل



∵ ء ب قطر ، أ ب مماس ∴ ق (∠أ ب ء) = ٩٠°

∴ ق (∠ء) = ١٨٠ − [٥٠ + ٩٠] = ١٨٠° − ١٤٠ = ٤٠°

∵ ء ب قطر ∴ ق (∠ء جـ ب) = ٩٠° [محيطية مقامة فى نصف دائرة]

∴ ق (∠ ء ب جـ) = ١٨٠ − [٩٠ + ٤٠] = ١٨٠ − ١٣٠ = ٥٠°

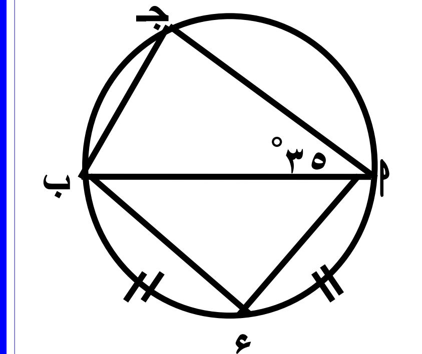
****

مثــ٢ــال : فى الشكل المقابل : أ ب قطر فى الدائرة م ، طول أ ء = طول ب ء

ق (∠جـ أ ب) = ٣٥° أوجد بالبرهان ق (∠جـ ب ء)

الحــــــل

∵ أب قطر ∴ ق (∠أ ء ب) = ٩٠°



طول ⌒أ ء = طول ⌒ب ء ∴ ق(⌒أ ء) = ق(⌒ب ء)

∴ أ ء = ب ء

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) = ٩٠/٢ = ٤٥°

∵ أ ب قطر ∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠جـ ب أ) = ١٨٠ – [٩٠+٣٥] = ١٨٠ – ١٢٥ = ٥٥°

∴ ق(∠جـ ب ء) = ٥٥ + ٤٥ = ١٠٠°

****

مثـــ٣ـــال: فى الشكل المقابل أب قطر فى الدائرة م ، طول ⌒أ ء = طول ⌒ء جـ

ق(∠أ ب جـ) = ٧٠° أوجد: ق(∠ء جـ أ) ، ق(∠جـ أب)

الحـــــل

∵ أب قطر ∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠جـ أب) = ١٨٠ – [٩٠ + ٧٠] = ١٨٠ – ١٦٠ = ٢٠°

∵ ق(∠أ ب جـ) = ٧٠° ∴ ق(⌒أ ء) + ق(⌒ء جـ) = ١٤٠° (١)

∵ طول ⌒أ ء = طول ⌒ء جـ ∴ ق(⌒أ ء) = ق(⌒ء جـ) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق(⌒أ ء) = ق(⌒ء جـ) = ٧٠°

∴ ق(∠أ جـ ء) = ١/٢ ق(⌒أ ء) = ١/٢ × ٧٠ = ٣٥°

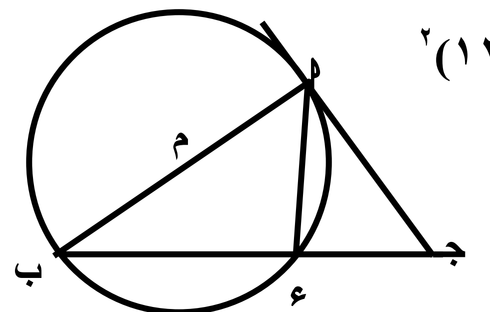
****

مثـ٤ـال : فى الشكل المقابل: أب قطر فى الدائرة م ، أ جـ تمس الدائرة عند أ

أ جـ = ٩ سم ، ب م = ٦ سم أوجد طول ب جـ ، أ ء

الحـــــل

∵ أ جـ مماس ، أ ب قطر ∴ ق(∠جـ أ ب) = ٩٠°



∴ (ب جـ)^2 = (جـ ٵ)^2 + (ٵ ب)^2 = (٩)^2 + (١٢)^2

= ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥

∴ ب جـ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

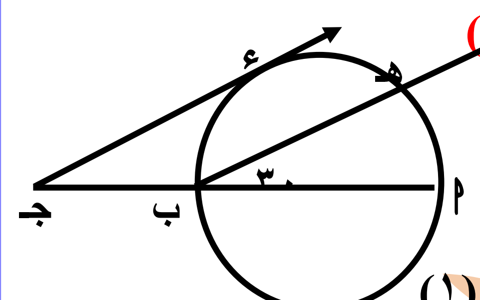
∵ ٵ ب قطر ∴ ق (∠ٵ ء ب) = ٩٠°

من أقليدس ٵ ء × ب جـ = ٵ ب × ٵ جـ   ∴ٵ ء × ١٥ = ٩ × ١٢

∴ ٵ ء = $\frac{٩ \times ١٢}{١٥}$ = ٧٫٢ سم

****

مثـال : فى الشكل المقابل: جـ ء مماس للدائرة م ، ٵ ب قطر لها ، جـ ء // ب هـ ، ق (∠ٵ ب هـ) = ٣٠° أوجد بالبرهان ق (ب ء)



الحـــل

∵ ق (∠ٵ ب هـ) = ٣٠° ∴ ق (ٵ هـ) = ٦٠°

∵ ب هـ // جـ ء ∴ ق (هـ ء) = ق (ب ء) (١)

∵ ٵ ب قطر ∴ ق (ٵ هـ) + ق (هـ ء) + ق (ب ء) = ١٨٠°

٦٠° + ق (هـ ء) + ق (ب ء) = ١٨٠°

∴ ق (هـ ء) + ق (ب ء) = ١٢٠° (٢)

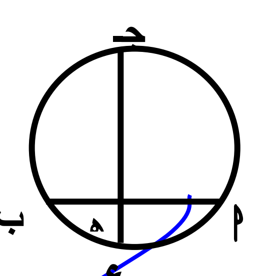
من ١ ، ٢ ينتج أن ق (ب ء) = ق (هـ ء) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

****

مثـال : فى الشكل المقابل: ٵ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م ، ٵ ب ∩ جـ ء = { هـ }

فإذا كان ق (ب ء) = ٦٠° ، ق (ٵ ء) = ١٠٠° ، ق (ٵ جـ) = ١٢٠°

أوجد: (١) ق (جـ ب) (٢) ق (جـ هـ ب)



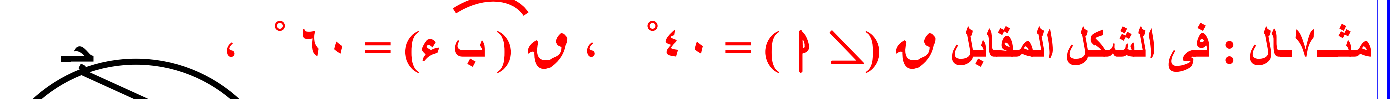
الحـــل

∵ ق (جـ ب) = ٣٦٠ – [٦٠ + ١٠٠ + ١٢٠] = ٣٦٠ – ٢٨٠ = ٨٠°

∴ ق (جـ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒ أ ء) + ق (⌒ ب جـ)]

= $\frac{١}{٢}$ [١٠٠ + ٨٠] = $\frac{١}{٢}$ × ١٨٠ = ٩٠°

****



مثـال ٧ : فى الشكل المقابل ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (⌒ ب ء) = ٦٠° ،

ق (⌒ ب جـ) = ق (⌒ ء هـ)

أوجد   (١) ق (⌒ هـ جـ)   (٢) ق (⌒ ب جـ)

الحـــــــــــــل

ق (∠ أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒ جـ هـ) – ق (⌒ ب ء)] ،، ق (∠ أ) = ٤٠°

∴ ق (⌒ جـ هـ) – ق (⌒ ب ء) = ٨٠°

ق (⌒ جـ هـ) – ٦٠° = ٨٠°   ∴ ق (⌒ جـ هـ) = ٨٠° + ٦٠° = ١٤٠°

ق (⌒ ب جـ) + ق (⌒ ء هـ) = ٣٦٠ - [١٤٠ + ٦٠] = ٣٦٠ – ٢٠٠ = ١٦٠°

ق (⌒ ب جـ) = ق (⌒ ء هـ)   ∴ ق (⌒ ب جـ) = $\frac{١٦٠}{٢}$ = ٨٠°

****

مثـال ٨ : فى الشكل المقابل: ء جـ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ أ) = ٣٠°

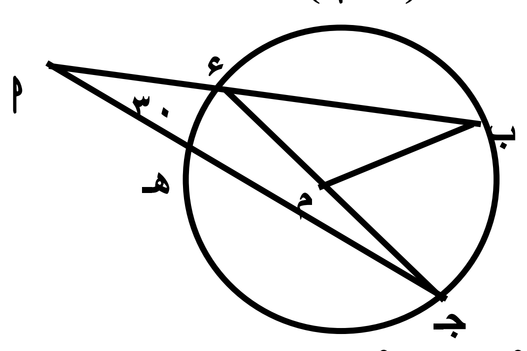
ق (⌒ ء هـ) = ٢٠°   أوجد : ق (∠ ب ء جـ)

الحـــــــل

ق (∠ أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒ ب جـ) – ق (⌒ ء هـ)] ،،، ق (∠ أ) = ٣٠°

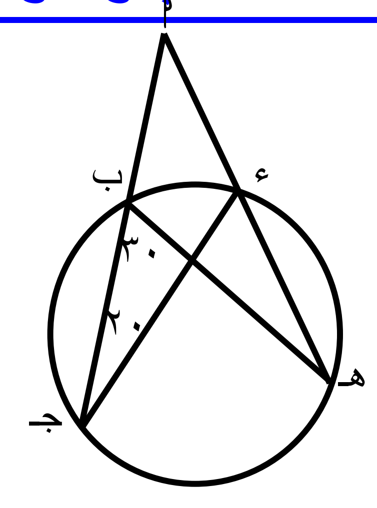
∴ ق (⌒ ب جـ) – ق (⌒ ء هـ) = ٦٠°

∴ ق (⌒ ب جـ) – ٢٠° = ٦٠°



∴ ق (⌒ ب جـ) = ٦٠° + ٢٠° = ٨٠°

∴ ق (∠ ب ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (⌒ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠° = ٤٠°



مثـ٩ـال : فى الشكل المقابل: إذا كان: ق (∠هـ ب جـ) = ٥٠ °

، ق (∠ ء جـ ب) = ٢٠ ° أوجد ق (∠هـ أ جـ)

الحـــــــل

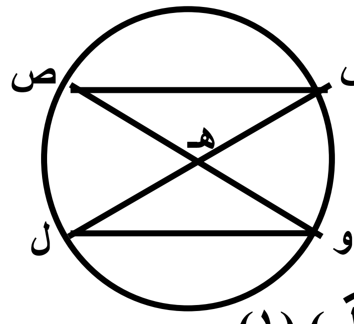
∵ ق (ب ء⌒) = ٢ ق (∠ء ب جـ) = ٢ × ٢٠ = ٤٠ °

∴ ق (هـ جـ⌒) = ٢ ق (∠هـ ب جـ) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

∴ ق (هـ أ جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (هـ جـ⌒) – ق (ب ء⌒)]

= $\frac{1}{2}$ [٦٠ ° – ٤٠ °] = $\frac{1}{2}$ × ٢٠ ° = ١٠ °

****



مثـ١٠ـال : فى الشكل المقابل: س ص // و ل إثبت ان

(١) س ل = و ص (٢) ق (∠ س هـ و) = ق (س و⌒)

الحـــــــل

∵ س ص // و ل ∴ ق (س و⌒) = ق (ص ل⌒) (١)

بأضافة ق (و ل⌒) للطرفين ∴ ق (س و⌒) + ق (و ل⌒) = ق (ص ل⌒) + ق (و ل⌒)

∴ ق (س ل⌒) = ق (و ص⌒)

∴ س ل = و ص 　　[وهو المطلوب أولاً]

ق (س هـ و) = $\frac{1}{2}$ [ق (س و⌒) + ق (ص ل⌒)]

بالتعويض من ١ نجد أن 　ق (س هـ و) = $\frac{1}{2}$ [ق (س و⌒) + ق (س و⌒)]

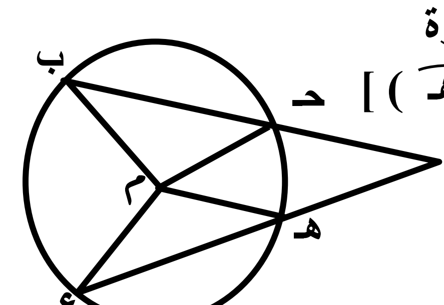
= $\frac{1}{2}$ × ٢ ق (س و⌒) = ق (س و⌒)

****

مثـ١١ـال : فى الشكل المقابل : إذا كان ق (∠ أ) = ٣٠°، ق (∠ ب م ء) = ١٠٠°

أوجد ق (∠ حـ م هـ)

الحـــــــل



∵ $\overleftarrow{حـ ب} \cap \overleftarrow{ء هـ}$ = { أ } ، أ تقع خارج الدائرة

∴ ق (∠ حـ أ هـ) = ½ [ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) − ق ($\overset{\frown}{حـ هـ}$)]

٣٠° = ½ [١٠٠° − ق ($\overset{\frown}{حـ هـ}$)]

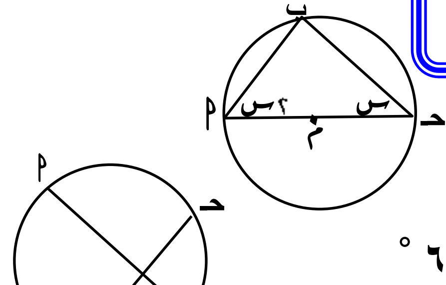
∴ ق ($\overset{\frown}{حـ هـ}$) = ١٠٠ − ٦٠ = ٤٠°

∴ ق (∠ حـ م هـ) = ½ ق ($\overset{\frown}{حـ هـ}$)

= ½ × ٤٠° = ٢٠°

****

تمارين



(١) فى الشكل المقابل :

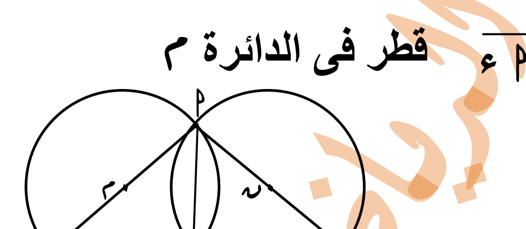
أوجد ق (∠ أ ب حـ)

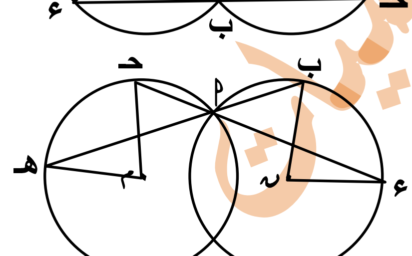
(٢) فى الشكل المقابل : إذا كان ق (∠ ب هـ حـ) = ٦٠° ، ق ($\overset{\frown}{أ ب ء}$) = ٢٢٠° أوجد ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$)

(٣) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب رسم $\overline{أ ء}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أ حـ}$ قطر فى الدائرة ن أثبت أن :

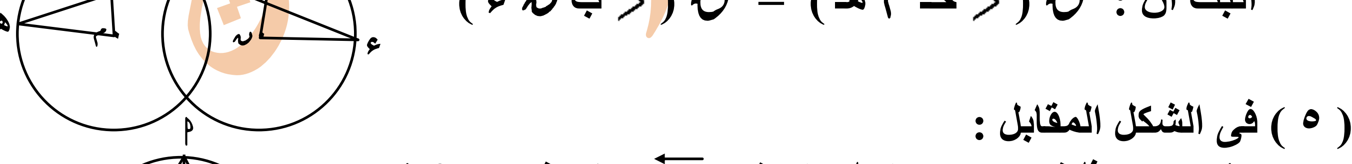
النقط حـ ، ب ، ء على إستقامة واحدة





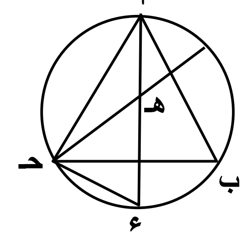
(٤) فى الشكل المقابل :

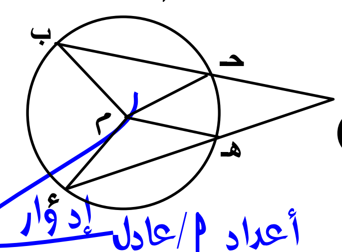
أثبت أن : ق (∠ حـ م هـ) = ق (∠ ب ن ء)



(٥) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ و يقطع الدائرة فى ء ، $\overline{أ ء}$ ينصف ∠ حـ و يقطع $\overleftarrow{حـ هـ}$ فى هـ أثبت أن : المثلث حـ ء هـ متساوى الساقين



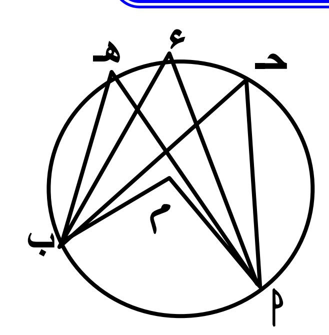


(٦) فى الشكل المقابل : أ نقطة خارج الدائرة م أثبت أن :

ق (∠ ب م ء) − ق (∠ حـ م هـ) = ٢ ق (∠ أ)

الزاوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

تمهيد :



إرسم شكلاً كالشكل المقابل ثم أوجد :

[١] بإستخدام المنقلة قياس كل من

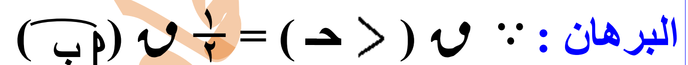
ق (< حـ) ، ق (< ء) ، ق (< هـ)

[٢] أستنتج علاقة تربط بين قياسات الزوايا حـ ، ء ، هـ

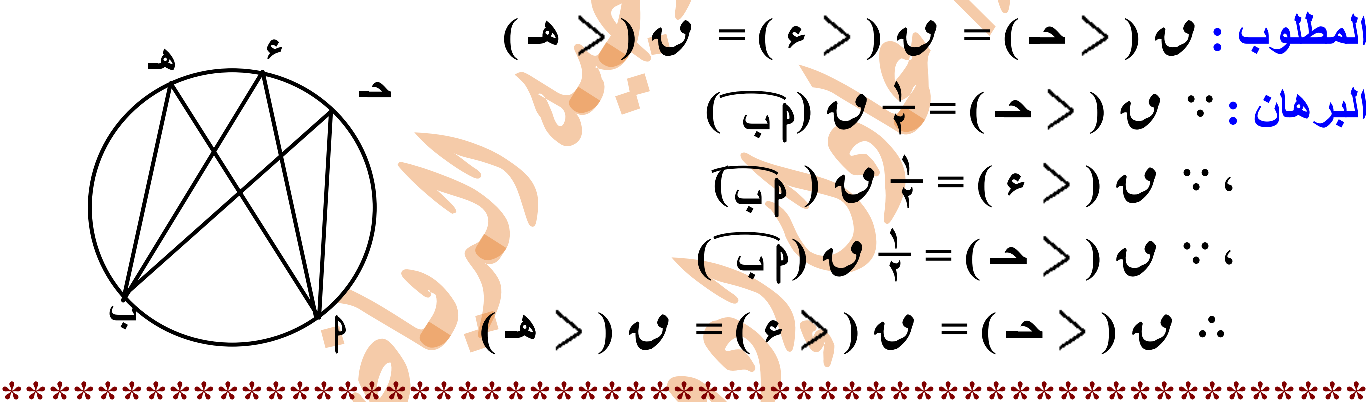
نظرية : الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس



المعطيات : < حـ ، < ء ، < هـ زاوايا محيطية مشتركة فى القوس أب



المطلوب : ق (< حـ) = ق (< ء) = ق (< هـ)



البرهان : ∵ ق (< حـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (أب)

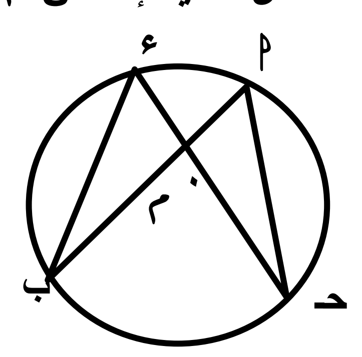
، ∵ ق (< ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (أب)

، ∵ ق (< حـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (أب)

∴ ق (< حـ) = ق (< ء) = ق (< هـ)

****

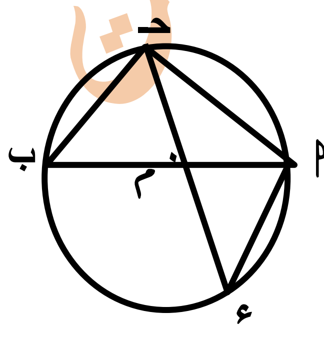
تدريب : فى الأشكال الآتية إذا كان م مركز دائرة أوجد قيمة كل من س ، ص بالدرجات :



ق (< ب) = ٣٠° ، ق (< ء) = ٦٠°

ق (< أ) = ... °

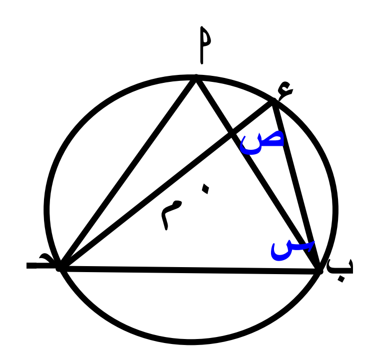
، ق (< ج) = ... °



أب قطر فى الدائرة م

، ق (< ء) = ٥٠°

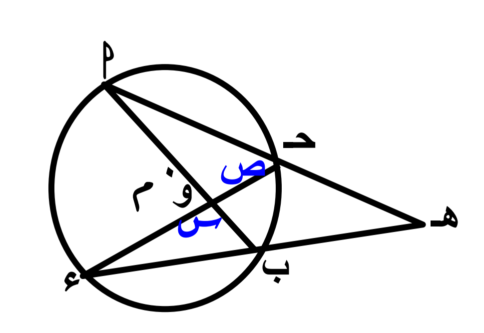
ق (< ب أ حـ) = ... °



$\triangle$ أ ب حـ متساوى الأضلاع

ق (∠ أ ب حـ) = ... °

، ق (∠ حـ ء ب) = ... °



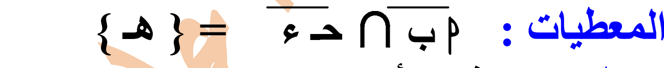
ق (∠ أ) = ٢٥° ، ق (∠ هـ) = ٣٠°

ق (∠ أ حـ ء) = ... °

، ق (∠ ب و ء) = ... °

****

تمرين مشهور (٣) : إذا تقاطع وتران داخل دائرة فإن حاصل ضرب طولا جزئى الوتر الأول يساوى حاصل ضرب طولا جزئى الوتر الثانى



المعطيات : $\overline{أب} \cap \overline{حـ ء}$ = { هـ }

المطلوب : إثبات أن : هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

العمــــل : نرســــم $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب حـ}$

البرهان : ∵ فى $\triangle\triangle$ هـ أ ء ، هـ حـ ب

ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) لأنهما زاويتان محيطيتان مشتركتان فى $\overset\frown{ب ء}$

ق (∠ ء) = ق (∠ ب) لأنهما زاويتان محيطيتان مشتركتان فى $\overset\frown{أ حـ}$

ق (∠ أ هـ ء) = ق (∠ حـ هـ ب) بالتقابل بالرأس

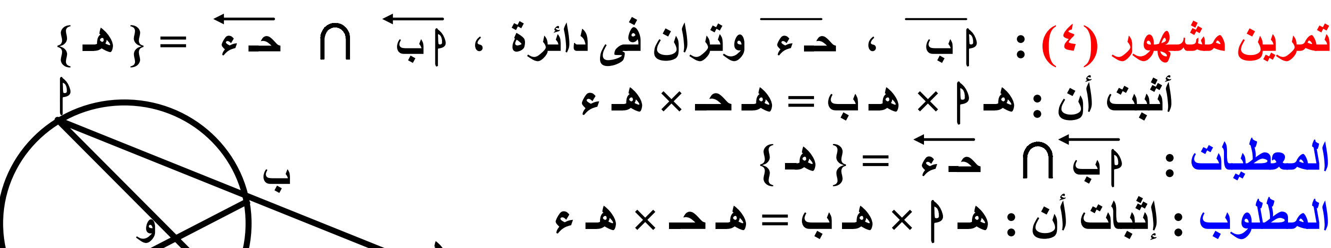
∴ يتشابه المثلثان هـ أ ء ، هـ حـ ب و ينتج أن : $\frac{هـ أ}{هـ حـ} = \frac{هـ ء}{هـ ب}$

∴ هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

****

تمرين مشهور (٤) : $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران فى دائرة ، $\overleftarrow{أب} \cap \overleftarrow{حـ ء}$ = { هـ }

أثبت أن : هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء



المعطيات : $\overleftarrow{أب} \cap \overleftarrow{حـ ء}$ = { هـ }

المطلوب : إثبات أن : هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

العمــــل : نرســــم $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب حـ}$

البرهان : ∵ فى $\triangle\triangle$ هـ أ ء ، هـ حـ ب

ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) لأنهما زاويتان محيطيتان مشتركتان فى $\overset\frown{ب ء}$

ق (< أ ب حـ) = ق (< أ ء حـ) لأنهما زاويتان محيطيتان مشتركتان فى أ⌒حـ

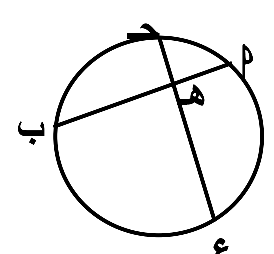
، < هـ مشتركة

∴ يتشابه المثلثان هـ أ ء ، هـ حـ ب و ينتج أن : هـ أ / هـ = هـ ء / هـ

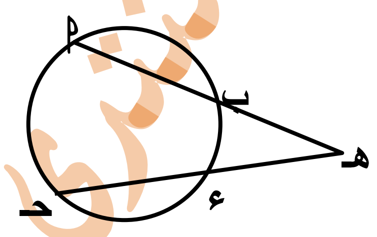
∴ هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

****

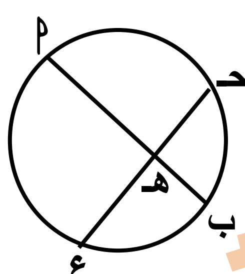
تدريب : فى الأشكال الآتية إذا كان م مركز دائرة أكمل ما يلى :



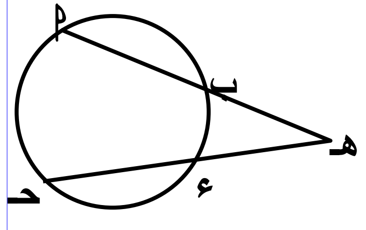
أ هـ = ٣ سم
، ب هـ = ٦ سم
، هـ حـ = ٤ سم
، هـ ء = ... سم



أ ب = ٦ سم
، ب هـ = ٤ سم
، هـ حـ = ٨ سم
، حـ ء = ... سم



أ هـ = ١٠
، ب هـ = ٨
، هـ حـ = ٤ س
، هـ ء = ٥ س
س = ...

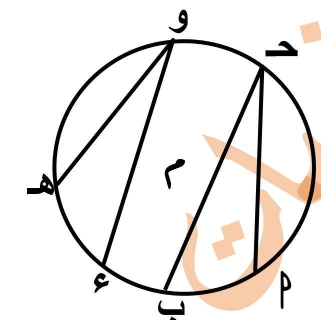


أ ب = س ـ ٣
، ب هـ = ٥
، ء حـ = ١١
، هـ ء = ٤
س = ...

****

نتيجة : الزوايا المحيطية التى تحصر أقواساً متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر) متساوية فى القياس

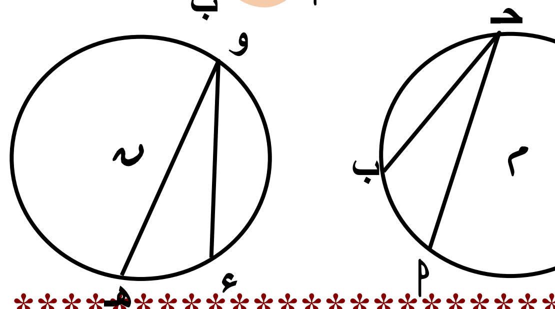
فى الشكل المقابل :



إذا كان ق (أ⌒ب) = ق (ء⌒هـ) فى الدائرة م

فإن : ق (< حـ) = ق (< و)

، فى الشكل المقابل : لأى دائرتين م ، ن



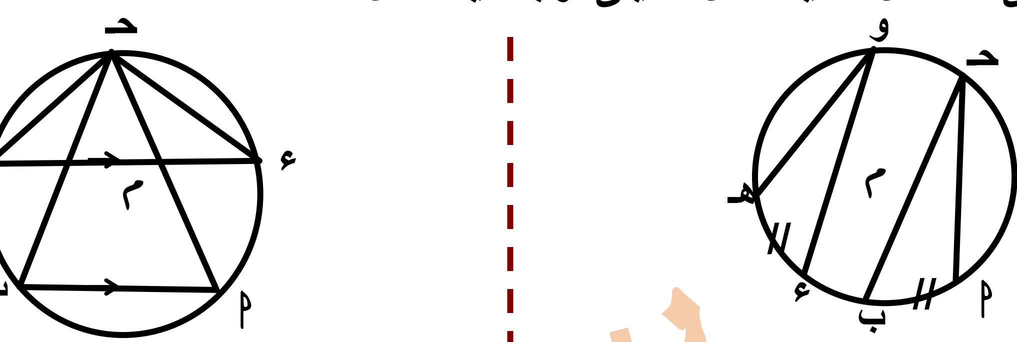
إذا كان ق (أ⌒ب) = ق (ء⌒هـ)

فإن : ق (< حـ) = ق (< و)

****

عكس النتيجة السابقة صحيح : فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر) الزوايا المحيطية المتساوية فى القياس تحصر أقواساً متساوية فى القياس

تدريب : فى الأشكال الآتية أكمل ما يلى أوجد قيمة س :



ق (∠ حـ) = (٤ س – ٦)° ، ق (∠ و) = ٣٠° ، ق (∠ جـ) = ...°

ق (∠ ء حـ ٱ) = (٥ س – ٤٠)° ، ق (∠ ب حـ هـ) = ٦٠° ، ق (∠ ٱ ء و) = ...°

****

خواص الشكل الرباعى الدائرى

نظرية (٣) إذا كان الشكل رباعياً دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتين

المعطيات : ٱ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

المطلوب : (١) ق (∠ ٱ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

(٢) ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°

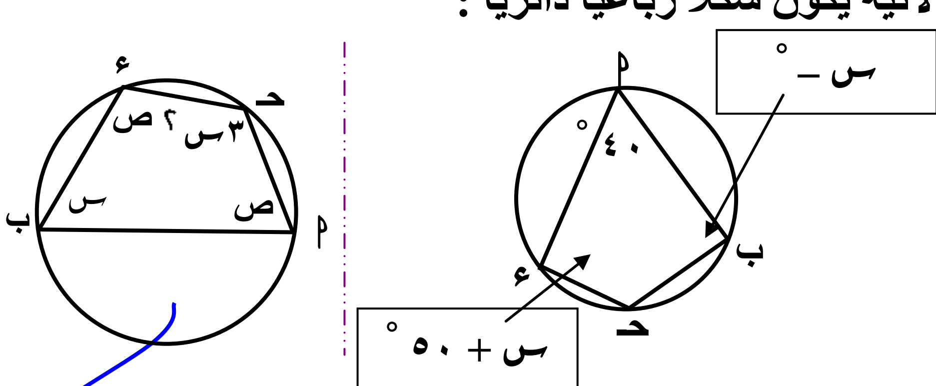
البرهان : ∵ ق (∠ ٱ) = ½ ق (ب حـ ء) ، ق (∠ حـ) = ½ ق (ب ٱ ء)

∴ ق (∠ ٱ) + ق (∠ حـ) = ½ [ق (ب حـ ء) + ق (ب ٱ ء)] = ½ × ٣٦٠° = ١٨٠°

بالمثل : ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°



تدريب : بين أى من الأشكال الآتية يكون شكلاً رباعياً دائرياً :




نتيجة : قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى


قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

فى الشكل المقابل : < حـ ء هـ خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى أ ب حـ ء

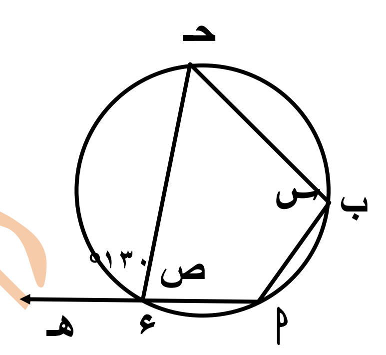
، < ب الداخلة المقابلة للمجاورة لها فيكون :

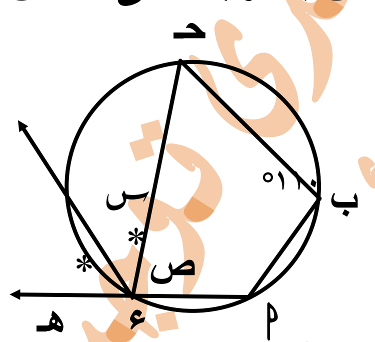
ق (< حـ ء هـ) = ق (< ب)

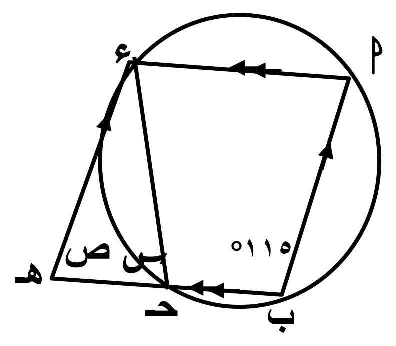
" مكملات الزاوية الواحدة متساوية فى القياس "

****

تدريب : أوجد قيمة كل من س ، ص بالدرجات فى كل من الأشكال الآتية :







****

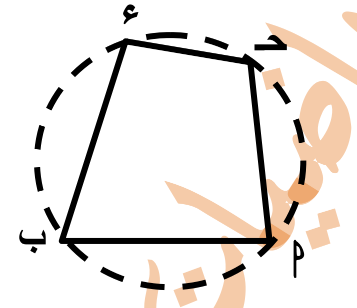
نتيجة : إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان فى شكل رباعى كان الشكل رباعياً دائرياً

فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (< أ) + ق (< حـ) = ١٨٠°

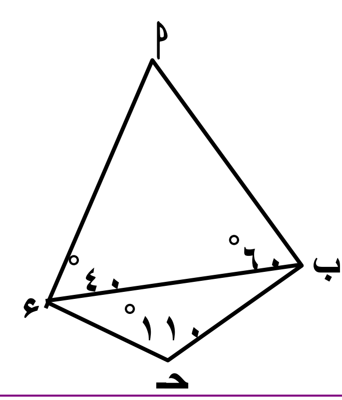
أو ق (< ب) + ق (< ء) = ١٨٠°

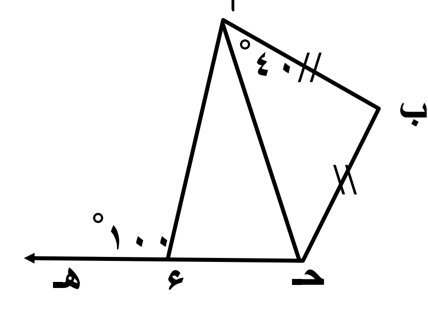
فإن : الشكل أ ب حـ ء يكون رباعياً دائرياً

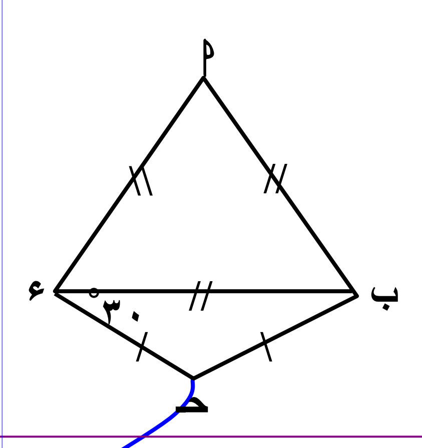


****

تدريب : بين أى من الأشكال الآتية يكون شكلاً رباعياً دائرياً :







ملاحظات :

(١) فى أى شكل رباعى دائرى إذا كانت إحدى زواياه قائمة فإن قطر الشكل المقابل لهذه الزاوية يكون قطراً فى الدائرة المارة برؤوسه ، مركزها نقطة منتصف هذا القطر

(٢) متوازى الأضلاع والمعين وشبه المنحرف كلاً منهم ليس شكلاً رباعياً دائرياً

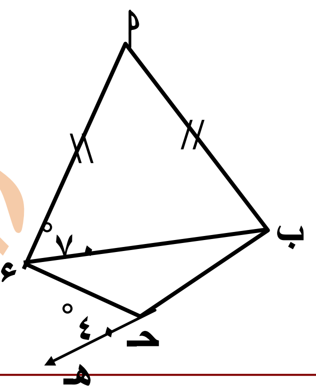
(٣) المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين كلاً منهم شكلاً رباعياً دائرياً

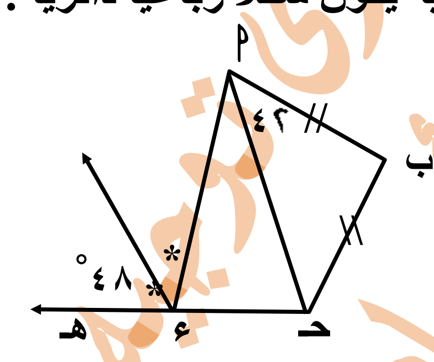
نتيجة :

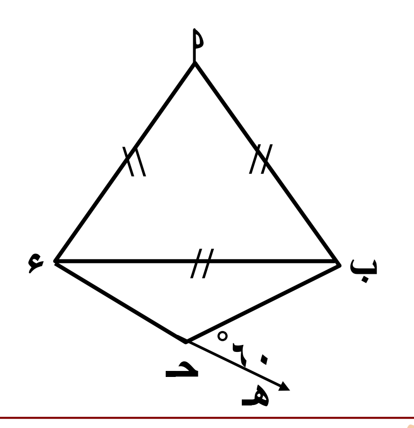
إذا وجدت زاوية خارجة عند رأس من رؤوس شكل رباعى قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعياً دائرياً

****

تدريب : بين أى من الأشكال الآتية يكون شكلاً رباعياً دائرياً :







عكس النظرية السابقة صحيح : إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها

فى الشكل المقابل :

> حـ ، > ء مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{أ ب}}$ و فى جهة واحدة منها

فإذا كان : ق (> حـ) = ق (> ء)

فإن : النقط أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة يكون $\overline{\text{أ ب}}$ وتراً فيها

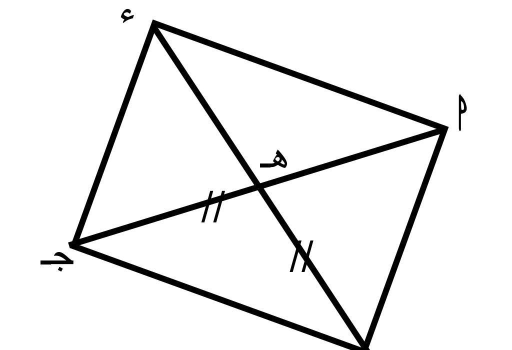
ملاحظات

(١) المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية

(٢) متوازى الاضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوى الساقين رباعية غير دائرية

****

مثـ١ـال : فى الشكل المقابل إذا كان $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، هـ ب = هـ جـ
إثبت أن الشكل: أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحــــــــل

فى Δ هـ ب جـ ب هـ = هـ جـ

∴ ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ هـ جـ ب) (١)

∵ $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$

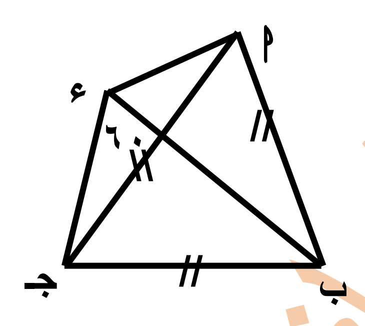
∴ ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ هـ جـ ب) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ ء أ جـ)

وهما على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة ∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

****

مثـ٢ـال : فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متساوى الاضلاع ق (∠ ب ء جـ) = ٦٠°
إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحــــل

∵المثلث ب جـ متساوى الاضلاع

∴ ق (∠ب أ جـ) = ٦٠° (١)

∵ق (∠ب ء جـ) = ٦٠° (٢)


من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠ب أ جـ) = ق (∠ ب ء جـ)

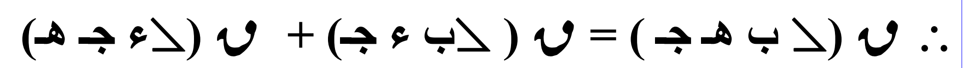
وهما على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة ∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

****

مثـ٣ـال : فى الشكل المقابل إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

الحــــــــل

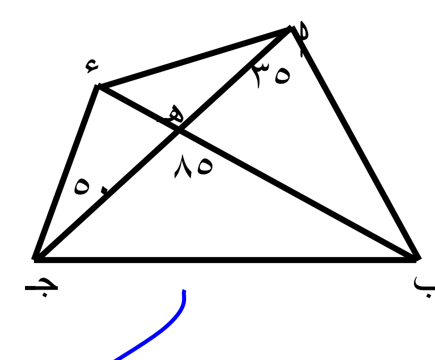

∵ ب هـ جـ زاوية خارجة عن Δ ء هـ جـ


∴ ق (∠ ب هـ جـ) = ق (∠ب ء جـ) + ق (∠ء جـ هـ)

∴ ق (∠ب ء جـ) = ٨٥° ـ ٥٠° = ٣٥°

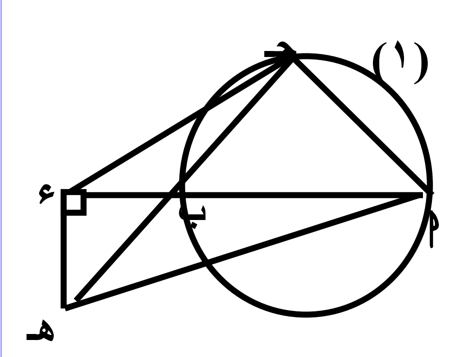
∴ ق (∠ب أ جـ) = ق (∠ب ء جـ)

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



مثـ٤ـال : فى الشكل المقابل: $\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ا ب}}$
إثبت أن ا جـ ء هـ رباعى دائرى

الحــــــل



∵ $\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق (∠ ا جـ ب) = ٩٠° (١)

∵ $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ∴ ق (∠ ا ء هـ) = ٩٠° (٢)

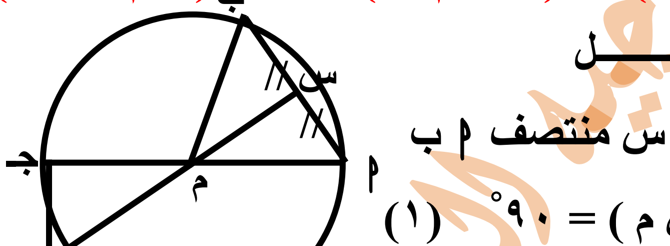
من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠ ا جـ ب) = ق (∠ ا ء هـ)

∴ الشكل ا جـ ء هـ رباعى دائرى

****

مثـ٥ـال : فى الشكل المقابل ا جـ قطر فى الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ مماس لها س منتصف $\overline{\text{ا ب}}$
إثبت أن (١) الشكل ا س جـ ص رباعى دائرى (٢) ق (∠ ب م جـ) = ٢ ق (∠ م ص جـ)

الحــــــل



فى Δ ا م ب ∵ م ا = م ب ، س منتصف ا ب

∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ∴ ق (∠ ا س م) = ٩٠° (١)

∵ ا جـ قطر ، $\overleftarrow{\text{جـ ص}}$ مماس ∴ ق (∠ ا جـ ص) = ٩٠° (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠ ا س ص) = ق (∠ ا جـ ص)

∴ الشكل ا س جـ ص رباعى دائرى

فى Δ ا م ب ∵ م ا = م ب ∴ ق (∠ ا) = ق (∠ ب)

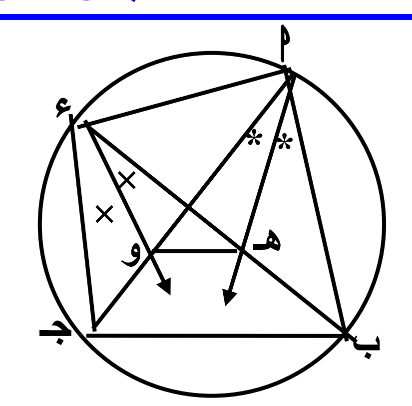
∴ ق (∠ ب م جـ) = ق (∠ ا) + ق (∠ب) ∴ ق (∠ ب م جـ) = ٢ ق (∠ ا)

∴ الشكل ا س جـ ص رباعى دائرى

∴ ق (∠ا) = ق (∠ م ص جـ) ∴ ق (∠ب م جـ) = ٢ ق (∠م ص جـ)

****

مثـ٦ـال فى الشكل المقابل: ؟ ب جـ ء رباعى دائرى فيه
؟ هـ ينصف ∠ب ؟ جـ ، ء و ينصف ∠ ب ء جـ
إثبت أن ؟ هـ و ء رباعى دائرى



الحـــــــل

الشكل ؟ ب جـ ء رباعى دائرى　　∴ ق (∠ ب ؟ جـ) = ق (∠ ب ء جـ)　(١)

∵ ؟ هـ ينصف ∠ب ؟ جـ

∴ ق (∠ب ؟ هـ) = ق (∠هـ ؟ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ب؟جـ)　(٢)

∵ ء و ينصف ∠ ب ء جـ

∴ ق (∠ب ء و) = ق (∠ و ء جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ب ء جـ)　(٣)

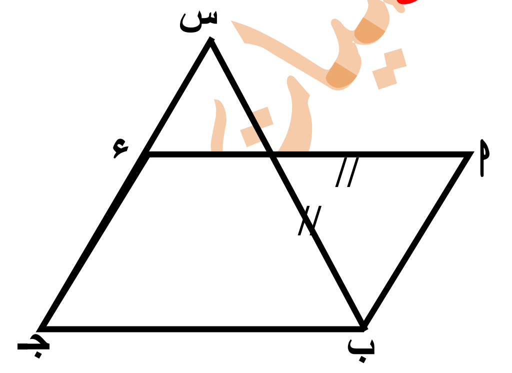
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن　ق (∠ هـ ؟ جـ) = ق (∠ب ء و)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة　　∴الشكل ؟ هـ و ء رباعى دائرى

****

مثـ٧ـال : فى الشكل المقابل ؟ ب جـ ء متوازى أضلاع ، س ∈ جـ ء

بحيث س ب = ؟ ء　إثبت أن الشكل ؟ ب ء س رباعى دائرى



الحـــــــل

∵ ؟ء = ب جـ　من خواص متوازى أضلاع

∵ ؟ ء = س ب　معطى

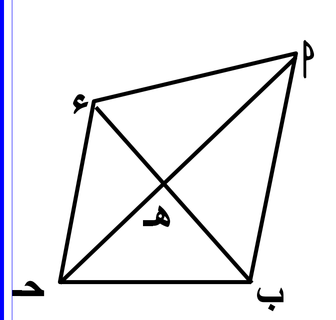
∴ ب س = ب جـ

∴ ق (∠س) = ق (∠جـ)　(١)

من خواص متوازى الاضلاع ق (∠ ؟) = ق (∠ جـ)　(٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن　ق (∠ س) = ق (∠ ؟)　∴ الشكل ؟ ب ء س رباعى دائرى

****



مثـ٨ـال : فى الشكل المقابل : م ب حـ ء شكل رباعى فيه م ء = ء حـ
، ق (< م ء ب) = ٥٥° ، ق (< م هـ ب) = ١٠٠°
، ق (< م ب ء) = ٤٥°
بين هل يمكن أن تمر دائرة بالنقط م ، ب ، حـ ، ء

الحـــــــــل

∵ < م هـ ب خارجة عن Δ م هـ ء ∴ ق (< ء م هـ) = ١٠٠ ـ ٥٥ = ٤٥°

∵ فى Δ م حـ ء : م ء = ء حـ ∴ ق (< م حـ ء) = ق (< ء م حـ) = ٤٥°

∵ ق (< م ب ء) = ق (< م حـ ء) = ٤٥°

م ء

و هما مرسومتان على قاعدة واحدة و فى جهة واحدة منها

∴ يمكن أن تمر دائرة بالنقط م ، ب ، حـ ، ء

****



تمارين


(١) فى الشكل المقابل :

أ حـ قطر فى الدائرة م ، ق (< أ حـ ب) = ٤٠°

، ق (< أ حـ ء) = ٣٠° أوجد :

ق (< حـ ء ب) ، ق (< حـ ب ء)


(٢) فى الشكل المقابل :

أ حـ قطر فى الدائرة م ، ق (< أ حـ ب) = ٤٣°

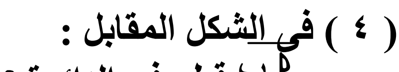

، ق (< ء أ حـ) = ٢٥° أوجد :

ق (< ء ب أ) ، ق (< ب أ ء)


(٣) فى الشكل المقابل :


إذا كان ب هـ = ٢ سم ، حـ هـ = ٣ سم ، ء هـ = ٤ سم

أوجد : طول أ هـ


(٤) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م ، أ ب ⊥ حـ ء ، حـ هـ = ٨ سم ،

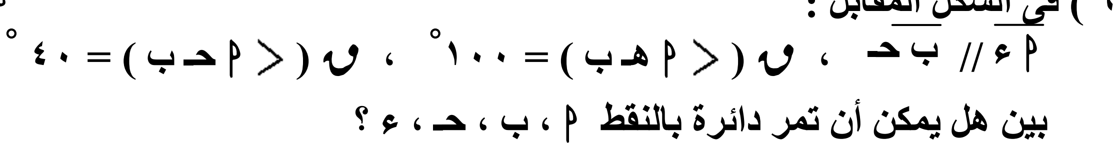
ب هـ = ٤ سم أوجد : مساحة سطح الدائرة م (π = ٣,١٤)


(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان : حـ ء = ٥ سم ، ب هـ = ٢ سم ، أ ب = ١٠ سم


أوجد طول ء هـ

(٦) فى الشكل المقابل :


أ ء // ب حـ ، ق (< أ هـ ب) = ١٠٠° ، ق (< أ حـ ب) = ٤٠°

بين هل يمكن أن تمر دائرة بالنقط أ ، ب ، حـ ، ء ؟

(٧) أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، تقاطع قطراه فى و ، س ∈ أ و ، ص ∈ ء و

بحيث أ ء // س ص إثبت أنه من الممكن رسم دائرة تمر بالنقط س ، ب ، حـ ، ص

تمارين عامة

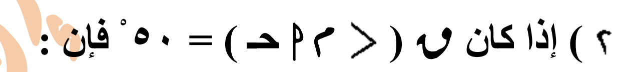
١ ــ أكمل ما يأتى :

١) الزاوية المركزية فى دائرة يقع رأسها عند ..... وكل من ضلعيها يحمل .....
٢) الزاوية التى يقع رأسها على الدائرة وكل من ضلعيها يحمل وتراً فى الدائرة تسمى .....
٣) الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسان .....
٤) فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس تكون .....
٥) قياس القوس = ... بينما طول القوس هو جزء من .....
٦) قياس نصف الدائرة = ... بينما طول نصف الدائرة = ...
٧) إذا كان دائرة محيطها = ٣٦ سم فإن قياس قوس فيها طوله ٦ سم = ...
٨) قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٤}$ قياس الدائرة = ...
٩) إذا كان قياس زاوية محيطية ٤٠° فإن قياس القوس المقابل لها = ...
١٠) إذا كان قياس زاوية مركزية ١٤٠° فإن قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس = ...
١١) طول القوس المقابل لزاوية محيطية قائمة فى دائرة محيطها ٦٠ سم = ...
١٢) إذا كانت الزاوية المحيطية تقابل قوساً أكبر من نصف الدائرة فإنها تكون .....

٢ ــ بإستخدام الأشكال المقابلة أكمل ما يأتى :



١) إذا كان ق (∠ أ ء حـ) = ٧٠° فإن : (١) ق (∠ أ و حـ) = ... °
(٢) ق (∠ أ م حـ) = ... ° (٣) ق (∠ أ ب حـ) = ... °



٢) إذا كان ق (∠ م أ حـ) = ٥٠° فإن :
(١) ق (∠ أ م حـ) = ... ° (٢) ق (∠ أ ب حـ) = ... °
(٣) ق (∠ أ ء حـ) = ... ° (٤) ق (∠ أ حـ ء) = ... °

٣) إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قطر ، ق (∠ أ) = ٢٠° ، ق (∠ أ حـ هـ) = ٥٠° فإن :
(١) ق (∠ أ حـ ب) = ... ° (٢) ق (∠ أ ب حـ) = ... °
(٣) ق (∠ ء) = ... °

٣ ــ أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

١) قياس $\frac{١}{٤}$ الدائرة = ... ° ($\frac{١}{٣}$ π نق ، ٩٠° ، ١٢٠° ، ٦٠°)
٢) طول ربع محيط الدائرة التى طول نصف قطرها نق = ...
(٤٥° ، ٩٠° ، π نق ، $\frac{١}{٢}$ π نق)

٣) الزاوية المحيطية التى تقابل قوساً أصغر من فى الدائرة ٠٠٠٠
(حادة ، قائمة ، منفرجة ، مستقيمة)

٤) قياس الزاوية المركزية = ٠٠٠٠ المقابل لها
(ضعف قياس القوس ، نصف قياس القوس ، قياس القوس ، ربع قياس القوس)

٥) قياس الزاوية المركزية : قياس الزاوية المحيطية المشتركتين فى نفس القوس = ٠٠٠٠
(١ : ٢ ، ٢ : ١ ، ٢ : ٣ ، ١ : ٣)

٦) فى أى دائرة الزاوية المحيطية التى قياسها س° يكون قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس=.........
(٢ س ، س ، $\frac{١}{٢}$ س ، $\frac{١}{٤}$ س)

٧) قياس الزاوية المحيطية = ٠٠٠٠ المقابل لها
(ضعف قياس القوس ، نصف قياس القوس ، قياس القوس ، ربع قياس القوس)

٨) الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ٠٠٠٠
(حادة ، قائمة ، منفرجة ، مستقيمة)

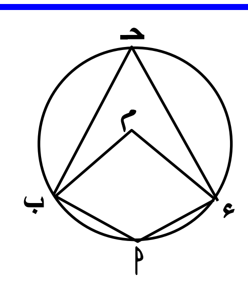
٩) الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس ٠٠٠٠
(متكاملة ، متساوية فى القياس ، متناظرة ، متبادلة)

١٠) طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠° لدائرة نصف قطرها ٢.١ سم هو ٠٠٠٠ سم
(٤,٤ ، ٦٠° ، ٦,٦ ، ٤,٢)

١١) إذا كانت زاوية مركزية قياسها ١٣٥° فى دائرة طول نصف قطرها ٤ سم فإن طول قوسها = ٠٠٠٠
(٦ π ، ٣ π ، $\frac{١٦}{٣}$ π ، ٢٧٠°)

١٢) فى الشكل المقابل : إذا كان م دائرة ، و ∈ ⌒ءحـ ، ب ∈ ⌒أحـ
، ق (∠ أ ء حـ) = ٧٠° فإن :
ق (∠ أ و حـ) = ... ° (٣٥ ، ٧٠ ، ١١٠ ، ١٤٠)
ق (∠ أ ب حـ) = ... ° (٣٥ ، ٧٠ ، ١١٠ ، ١٤٠)

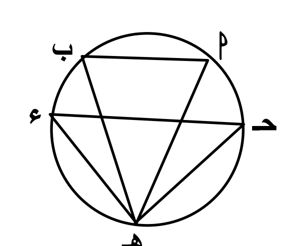
١٣) فى الشكل المقابل : إذا كان أ ب حـ ء مربع مرسوم داخل دائرة ، هـو ↔ // ب حـ
، هـو ↔ ويمس الدائرة عند س فإن :
ق (⌒ب س) = ... ° (٤٥ ، ٩٠ ، ٢٢,٥ ، ١٣٥)
ق (∠ أ س ب) = ... ° (٤٥ ، ٩٠ ، ٢٢,٥ ، ١٣٥)



١٤) فى الشكل المقابل : إذا كان أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م ، ق (∠ ب م ء) = ١٤٠° فإن :

ق (∠ ب أ ء) = ... ° (٣٥ ، ٧٠ ، ١١٠ ، ١٤٠)

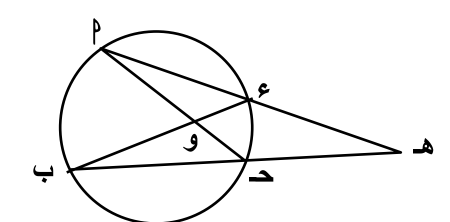
ق (∠ ب حـ ء) = ... ° (٣٥ ، ٧٠ ، ١١٠ ، ١٤٠)



١٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، هـ حـ = هـ ء

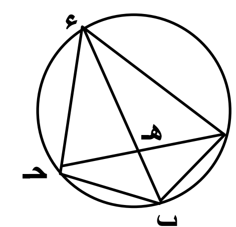
أثبت أن : أ هـ = ب هـ



١٦) فى الشكل المقابل : ق (∠ ء ب حـ) = ٢٥°

ق (∠ هـ) = ٣٦ ° ، أوجد

ق (∠ هـ أ حـ) ، ق (∠ أ حـ ب) ، ق (∠ ء و حـ)



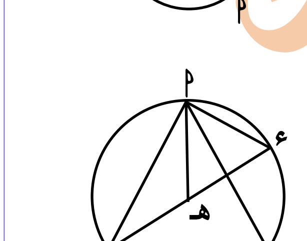
١٧) فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فإذا تقاطع قطراه فى هـ ، كان ق (∠ ء ب حـ) = ٤٢° ، ق (∠ ب حـ ء) = ٨٣°

ق (∠ أ حـ ء) = ٦٣° أوجد قياسات زوايا Δ أ ب ء

١٨) فى الشكل المقابل :

$\overline{حـ ء}$ قطر فى الدائرة م ، هـ ء = ٢ سم ، ب أ = ٥ سم ، ب هـ = ٤ سم

أوجد طول كلا من نصف قطر الدائرة

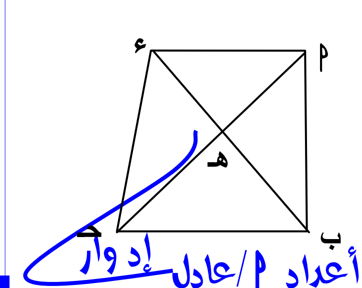


١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة ، ء ∈ $\overset{\frown}{أ ب}$ ،

هـ ∈ $\overline{حـ ء}$ بحيث أ ء = ء هـ

أثبت أن : المثلث أ ء هـ متساوى الأضلاع

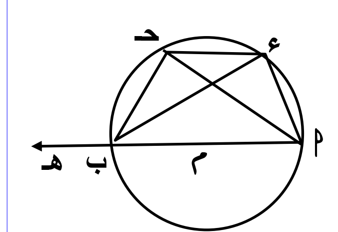


٢٠) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ ب}$ ، ب هـ = هـ حـ ، ق (∠ حـ أ ء) = ٣٠°

بين هل يمكن أن تمر دائرة بالنقط أ ، ب ، حـ ، ء ؟

٢١) فى الشكل المقابل :



م ب قطر فى الدائرة م ، هـ ∈ م ب (شعاع)

ق (∠ ب ء حـ) = ٣٥° ، أوجد

ق (∠ م ء ب) ، ق (∠ حـ م ب) ، ق (∠ حـ ب هـ)

٢٢) فى الشكل المقابل :

حـ نقطة خارج الدائرة م ، حـ هـ (شعاع) يقطع الدائرة فى هـ ، ب

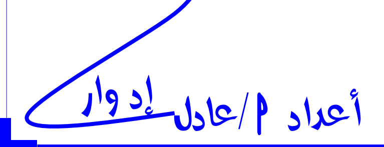
، حـ ء (شعاع) يقطع الدائرة فى ء ، م ، فإذا كان : ق (∠ حـ) = ٤٠°

، ق (∠ هـ م حـ) = ٣٠° أوجد : ق (م ب (قوس)) ، ق (∠ م م ب)

٢٣ ـ م ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه م ب = م حـ ، ء منتصف ب حـ ، رسم حـ هـ (شعاع) ⊥ م حـ حيث حـ هـ (شعاع) ∩ م حـ = { هـ } أثبت أن النقط م ، ب ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة

٢٤ ـ م ب قطر فى الدائرة م ، حـ ، ء ∈ للدائرة و فى جهتين مختلفتين من القطر م ب بحيث ، ق (∠ م ب حـ) = ٣٠° ، ء حـ = ء ب أثبت أن ب م (شعاع) ينصف ∠ ء ب حـ

****



الشكل الرباعى الدائرى

يكون الشكل الرباعى دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الأتية

١ ـ إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

٢ ـ إذا وجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع

٣ ـ إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠ °)

٤ ـ إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة

تمهيد : فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (< ء م حـ) = ٤٤ ° ، ق (< م حـ ب) = ٦٠ °

، ق (< ء و حـ) = ١٠٤ ° أبحث إمكانية رسم دائرة تمر بالنقط م ، ب ، حـ ، ء



الحـــــل

∵ < ء و حـ خارجة عن المثلث ب و حـ



∴ ق (< ء ب حـ) = ١٠٤ ° ـ ٦٠ ° = ٤٤ °

∴ ق (< ء ب حـ) = ق (< ء م حـ) وهما زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة و رأساهما ب ، م فى جهة واحدة من هذه القاعدة $\overline{\text{ءحـ}}$

∴ من الممكن رسم دائرة تمر بالنقط م ، ب ، حـ ، ء

****

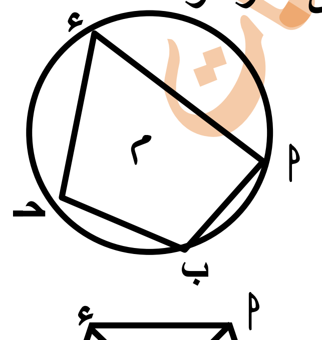
الشكل الرباعى الدائرى : هو شكل رباعى تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة



ملاحظات : (١) فى الشكل المقابل :

الشكل م ب حـ ء شكل رباعى دائرى لأن :

رؤوسه م ، ب ، حـ ، ء تنتمى إلى الدائرة م





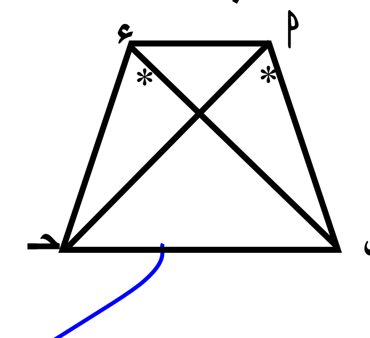
(٢) فى الشكل المقابل :

الشكل م ب حـ ء شكل رباعى دائرى لأن :

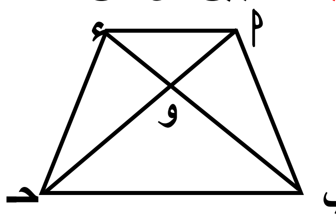
ق (< ب ء حـ) = ق (< ب م حـ)

و هما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{ب حـ}}$ و فى جهة واحدة منها

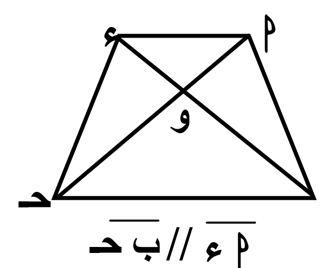
فيمكن رسم دائرة تمر بالنقط م ، ب ، حـ ، ء



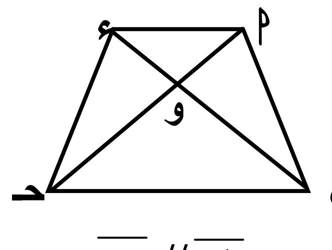
تدريب : بين أى من الأشكال الآتية يكون شكلاً رباعياً دائرياً :



ب ٲ = ب حـ ، ق (∠ ٲ ب حـ) = ٨٠° ، ق (∠ ب ء حـ) = ٥٠°



ٲ ء // ب حـ ، ق (∠ ٲ و ب) = ٨٥° ، ق (∠ ب حـ و) = ٤٠°



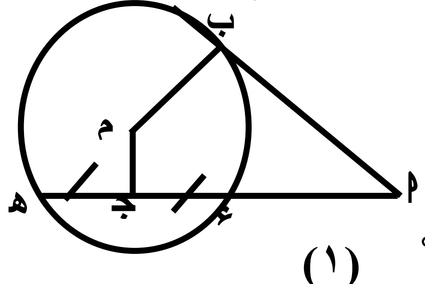
ٲ ء // ب حـ ، ب و = و حـ ، ق (∠ ب ء ٲ) = ٤٠°

****

مثـ١ـال : فى الشكل المقابل إذا كان ٲ ب مماس للدائرة م ، جـ منتصف ء هـ

إثبت أن الشكل ٲ ب جـ م رباعى دائرى





الحـــــــل

∵ ٲ ب مماس للدائرة م ∴ ق (∠ٲ ب م) = ٩٠° (١)

∵ جـ منتصف ء هـ ∴ ق (∠ٲ جـ م) = ٩٠° (٢)

ق (∠ٲ ب م) + ق (∠ٲ جـ م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل ٲ ب م جـ رباعى دائرى

****

مثـ٢ـال : فى الشكل المقابل : ٲ ب = ٲ ء ، ق (∠ ٲ ب ء) = ٤٠° ، ق (∠جـ) = ٨٠°

إثبت أن الشكل ٲ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــل

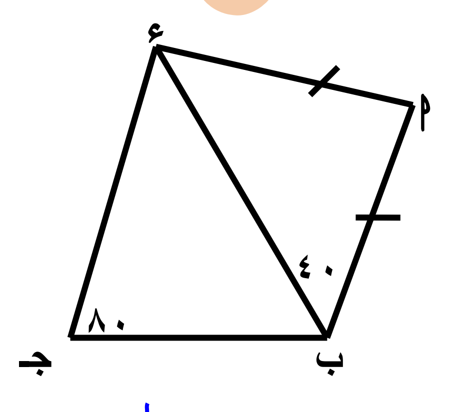
فى Δ ٲ ب ء ∵ ٲ ب = ٲ ء

∴ ق (∠ٲ ب ء) = ق (∠ٲ ء ب) = ٤٠°

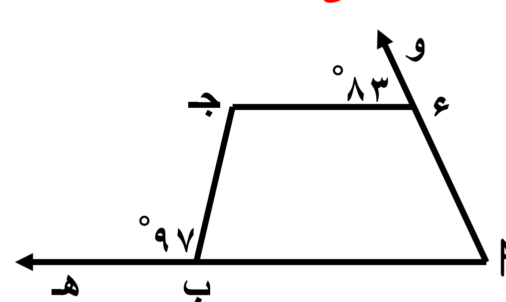
∴ ق (∠ ٲ) = ١٨٠° – [٤٠° + ٤٠°] = ١٠٠°

ق (∠ ٲ) + ق (∠جـ) = ١٠٠° + ٨٠° = ١٨٠°

∴ الشكل ٲ ب جـ ء رباعى دائرى



مثـ٣ـال : فى الشكل المقابل إثبت أن الشكل ٵ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــل

∵ ق (∠ٵ ء جـ) = ١٨٠° ـ ٨٣ = ٩٧°

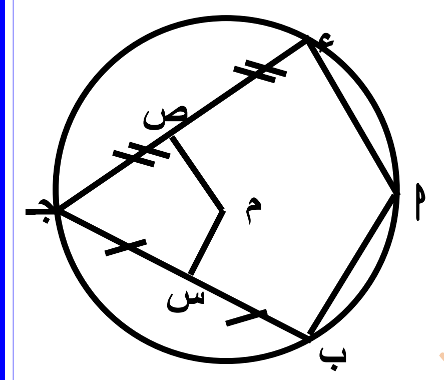
∴ ق (∠جـ ب هـ) = ق (∠ٵ ء جـ)

∴ الشكل ٵ ب جـ ء رباعى دائرى

****

مثـ٤ـال : فى الشكل المقابل : ٵ ب جـ ء رباعى مرسوم داخل دائرة م ، س منتصف ب جـ ، ص منتصف جـ ء إثبت أن (١) الشكل م س جـ ص رباعى دائرى

(٢) ق (∠س م ص) = ق (∠ ب ٵ ء)



الحـــــل

∵ س منتصف ب جـ ∴ ق (∠ م س جـ) = ٩٠°

∵ ص منتصف ء جـ ∴ ق (∠م ص جـ) = ٩٠°

ق (∠م س جـ) + ق (∠ م ص جـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل م س جـ ص رباعى دائرى (وهو المطلوب أولاً)

∴ ق (∠س م ص) + ق (∠جـ) = ١٨٠° (١)

الشكل ٵ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (∠ب ٵ ء) + ق (∠ جـ) = ١٨٠° (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠ س م ص) = ق (∠ ب ٵ ء) (وهو المطلوب ثانياً)

****

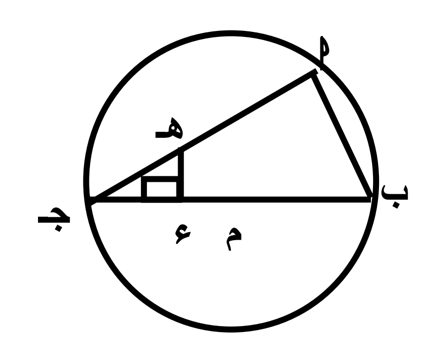
مثـ٥ـال : فى الشكل المقابل: ب جـ قطر فى الدائرة م ، هـ ء ⊥ ب جـ

إثبت أن (١) ٵ ب ء هـ رباعى دائرى (٢) ق (∠جـ هـ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (ٵجـ)

الحـــــل

∵ ب جـ قطر فى الدائرة م

∴ ق (∠ ٲ) = ٩٠° [محيطية مقامة فى نصف دائرة]



∵ هـ ء ⊥ ب جـ ∴ ق (∠ هـ ء ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ ٲ) + ق (∠ هـ ء ب) = ٩٠+٩٠ = ١٨٠°

∴ الشكل ٲ ب ء هـ رباعى دائرى

∴ ق (∠ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (ٲ جـ)

∵ ق (∠ جـ هـ ء) = ق (∠ ب) الخارجة تساوى المقابلة للمجاورة

∴ ق (∠ جـ هـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (ٲ جـ)

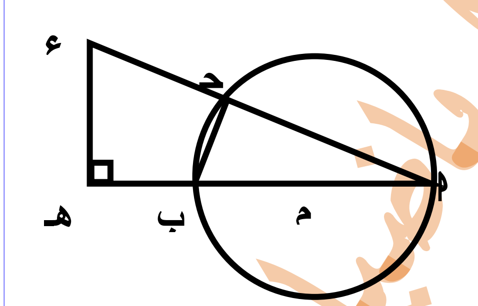
****

مثــ٦ــال : فى الشكل المقابل: ٲ ب قطر فى الدائرة م ، ء هـ ⊥ ٲ ب

إثبت أن ب هـ ء جـ رباعى دائرى



الحـــــــــــل



∵ ٲ ب قطر ∴ ق (∠ ٲ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ب جـ ء) = ١٨٠° – ٩٠° = ٩٠°

∵ ء هـ ⊥ ٲ ب ∴ ق (∠ء هـ ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ ب جـ ء) + ق (∠ ء هـ ب) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

∴ الشكل ب هـ ء جـ رباعى دائرى

****

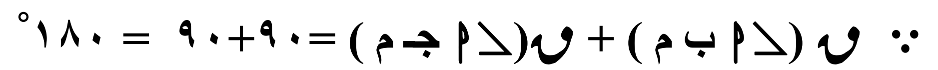
مثــ٧ــال : فى الشكل المقابل : ٲ ب ، ٲ جـ تمسان الدائرة م عند ب ،جـ ، ق (∠ ٲ) = ٤٥°

إثبت أن (١) الشكل ٲ ب م جـ رباعى دائرى (٢) Δ م جـ ء متساوى الساقين

الحـــــــــــل

∵ ٲ ب مماس ∴ ق (∠ ٲ ب م) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ مماس ∴ ق (∠أ جـ م) = ٩٠°



∵ ق (∠أ ب م) + ق(∠أ جـ م) = ٩٠+٩٠ = ١٨٠°

∵ مجموع قياسات الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق (∠ب م جـ) = ٣٦٠° – [٩٠+٩٠+٤٥] = ١٣٥°

∴ ق (∠جـ م ء) = ١٨٠° – ١٣٥ = ٤٥°

∴ ق (∠م جـ ء) = ١٨٠° – ق (∠م جـ أ) = ١٨٠ – ٩٠ = ٩٠°

فى Δ م جـ ء ∵ ق (∠ء) = ١٨٠° – [٩٠+٤٥] = ٤٥°

ق (∠جـ م ء) = ق (∠ء)

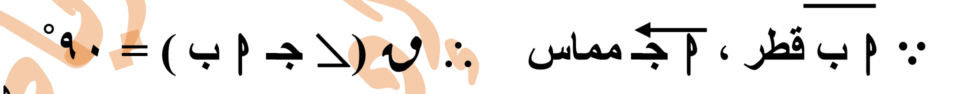
∴ جـ م = جـ ء ∴ المثلث م جـ ء متساوى الساقين

****

مثـ٨ـال : فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة عند أ

هـ منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ إثبت أن الشكل م أ جـ هـ رباعى دائرى

الحـــــــل



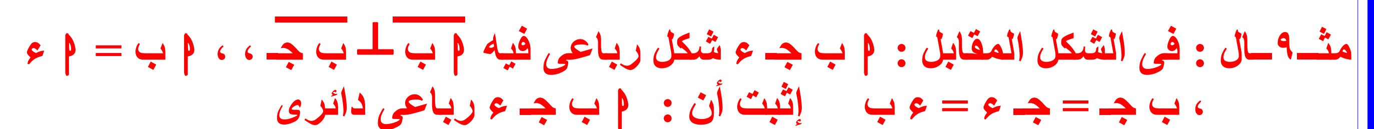
∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماس ∴ ق (∠جـ أ ب) = ٩٠°

∵ هـ منتصف ء ب ق (∠م هـ جـ) = ٩٠°

ق (∠جـ أ ب) + ق (∠م هـ جـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨°

∴ الشكل م أ جـ هـ رباعى دائرى

****



مثـ٩ـال : فى الشكل المقابل : أ ب جـ ء شكل رباعى فيه $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ، أ ب = أ ء

، ب جـ = جـ ء = ء ب إثبت أن : أ ب جـ ء رباعى دائرى

الحـــــــل

فى Δ ء ب جـ ∵ ء ب = ب جـ = جـ ء

∴ ق (∠جـ) = ق (∠ء ب جـ) = ق (∠ب ء جـ) = ٦٠°

∵ م ب ⊥ ب جـ ∴ ق (∠ م ب جـ) = ٩٠°

∴ ق (∠ م ب ء) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

فى Δ م ب ء ∵ م ب = م ء ∴ ق (∠ م ب ء) = ق (∠ م ء ب) = ٣٠°

∴ ق (∠ م) = ١٨٠° - [٣٠+٣٠] = ١٢٠°

∴ ق (∠ م) + ق (∠ جـ) = ١٢٠+٦٠=١٨٠° ∴ الشكل م ب جـ ء رباعى دائرى

****

مثــ١٠ــال : فى الشكل المقابل م ء // ب جـ ، م س ص ء رباعى دائرى

إثبت أن الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى

الحـــــــــــــــل



∵ م ء // ب جـ ، م ب قاطع لهما

∴ ق (∠ م) + ق (∠ ب) = ١٨٠° (١)

∴ الشكل م س ص ء رباعى دائرى

∴ ق (∠ م) + ق (∠س ص ء) = ١٨٠° (٢)

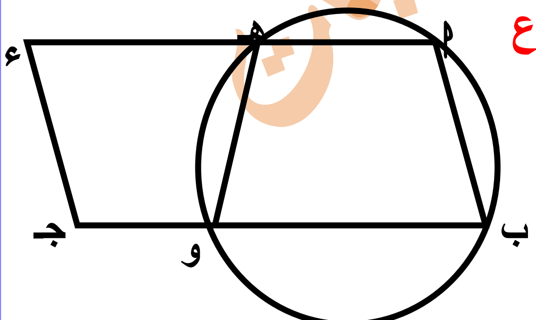
من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠س ص ء) = ق (∠ ب)

∴ الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى

****

مثــ١١ــال : فى الشكل المقابل: م ب جـ ء متوازى أضلاع

إثبت أن الشكل جـ ء هـ و رباعى دائرى



الحـــــــــــــــل

∵ م ب و هـ رباعى دائرى

∴ ق (∠ب) + ق (∠ م هـ و) = ١٨٠° (١)

∵م ب جـ ء متوازى أضلاع ∴ ق (∠ب) + ق (∠جـ) = ١٨٠° (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠ م هـ و) = ق (∠ جـ) ∴ الشكل جـ ء هـ و رباعى دائرى

مثـ١٢ـال : فى الشكل المقابل إذا كان ق(∠ ٩ ب ء) = ق(∠ ٩ ء ب) = س

ق(∠جـ) = ٢ س إثبت أن الشكل ٩ ب جـ ء رباعى دائرى

الحـــــــــل

فى ∆ ٩ ب ء

∵ ق (∠ ٩) = ١٨٠° – [س + س]

∴ ق (∠ ٩) + ق (∠جـ) = ١٨٠ – ٢ س + ٢ س = ١٨٠°

∴ الشكل ٩ ب جـ ء رباعى دائرى

****

مثـ١٣ـال : فى الشكل المقابل : ق (∠ ص س ع) = ق (∠ ص ل ع) = ٩٠°

أثبت أن الشكل س ص ع ل رباعى دائرى ، و إذا كان : ص م = ع م

عين مركز الدائرة المارة بروؤس الشكل س ص ع ل

الحـــــــل

∵ ق (∠ ص س ع) = ق (∠ ص ل ع)

و هما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{ص ع}}$

و فى جهة واحدة منها ∴ الشكل س ص ع ل رباعى دائرى

∵ ق (∠ ص ل ع) = ٩٠° ∴ $\overline{\text{ص ع}}$ قطر فى الدائرة

، ∵ ص م = ع م ∴ م مركز الدائرة المارة بروؤس الشكل س ص ع ل

****

مثـ١٤ـال : ٩ ب حـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{٩ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

أثبت أن : الشكل ٩ ب حـ ء رباعى دائرى

الحـــــــل

المعطيات : $\overline{\text{٩ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

المطلوب : إثبات أن الشكل ٩ ب حـ ء رباعى دائرى

البـــرهان : ∵ $\overline{\text{٩ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ١٨٠°

، ∵ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) = ١٨٠° و هما متقابلتان فى الشكل أ ب حـ ء

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

****

مثـال ١٥ : فى الشكل المقابل : $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ء منتصف $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب و}$ مماس للدائرة عند ب أثبت أن :

[١] الشكل م ء و ب رباعى دائرى

[٢] ق (∠ و) = ٢ ق (∠ ب أ هـ)

الحـــــل



∵ ء منتصف $\overline{أحـ}$

∴ ق (∠ م ء و) = ٩٠°

، ∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة ، $\overline{ب و}$ مماس لها

∴ ق (∠ م ب و) = ٩٠°

∴ ق (∠ م ب و) + ق (∠ م ء و) = ١٨٠°

و هما متقابلتان فى الشكل م ء و ب

∴ الشكل م ء و ب رباعى دائرى

، ∵ ∠ ب م هـ خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى م ء و ب

∴ ق (∠ و) = ق (∠ ب م هـ)

، ∵ ∠ ب م هـ المركزية ، ∠ ب أ هـ المحيطية مشتركتان فى القوس $\frown{ب هـ}$

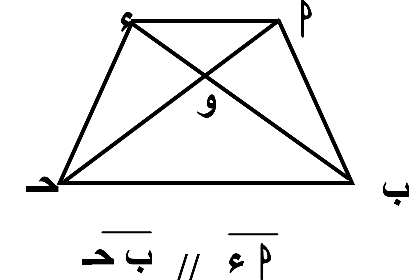
∴ ق (∠ ب م هـ) = ٢ ق (∠ ب أ هـ)

∴ ق (∠ و) = ٢ ق (∠ ب أ هـ)

****

تمارين

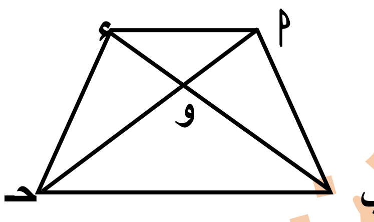
١) فى الأشكال التالية أثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى :



أ ء // ب حـ

، ق (< أ و ب) = ٧٠°

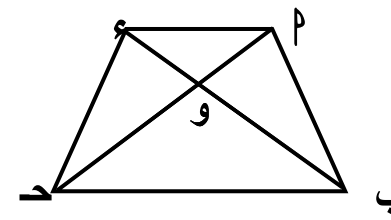
، ق (< أ ب ء) = ٣٥°



ق (< ب ء حـ) = ٩٠°

، ق (< أ حـ ب) = ٣٠°

، ق (< أ ب حـ) = ٦٠°



أ ء // ب حـ

، ق (< أ و ب) = ١٠٠°

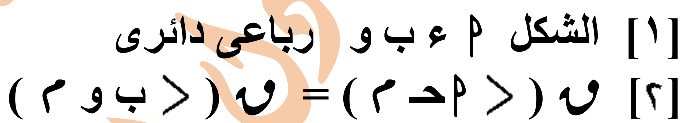
، ق (< أ حـ ب) = ٤٠°

٢) فى الشكل المقابل :

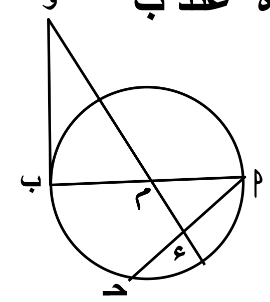
أ ب قطر فى الدائرة م ، ء منتصف أ حـ ، ب و مماس للدائرة عند ب

أثبت أن :

[١] الشكل أ ء ب و رباعى دائرى



[٢] ق (< أ حـ م) = ق (< ب و م)

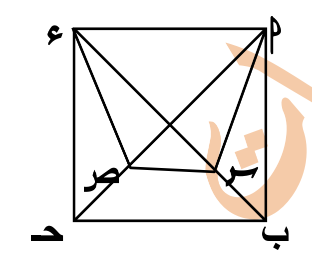


٣) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع ، أ س ينصف < ب أ حـ ، ء ص ينصف

< حـ ء ص أثبت أن الشكل أ س ص ء رباعى دائرى

ثم أثبت أن ق (< ص س ء) = ٤٥°

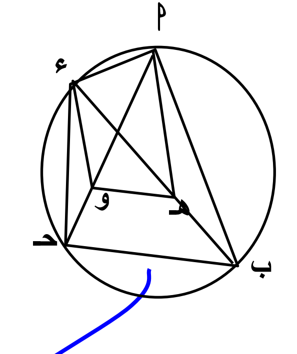


٤) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه أ هـ ينصف < ب أ حـ ،

ء و ينصف < ب ء حـ أثبت أن :

[١] الشكل أ هـ و ء رباعى دائرى



[٢] $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

٥) مثلث أ ب حـ مرسوم داخل دائرة ، رسم $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ يقطعه فى ء ، و يقطع الدائرة فى ، رسم $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ يقطعه فى و فإذا كان $\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{حـ و}}$ = { هـ }
أثبت أن : هـ ء = ء س

٦) مثلث أ ب حـ مرسوم داخل دائرة ، س ∈ $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$
بحيث ق ($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{أ ص}}$) ، $\overline{\text{حـ س}}$ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = { ء } ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ص}}$ = { هـ } أثبت أن :
[١] الشكل ب حـ هـ ء رباعى دائرى
[٢] ق (∠ ء هـ ب) = ق (∠ س أ ب)

٧ – أكمل ما يأتى :

١) الشكل الرباعى الدائرى هو ٠٠٠٠

٢) إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه ٠٠٠٠

٣) إذا تساوى قياسات عدة زوايا مرسومة على قاعدة واحدة و فى جهة واحدة منها فإن ٠٠٠٠

٤) إذا وجد فى الشكل الرباعى زاويتان ٠٠٠٠ فى القياس ومرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإن الشكل يكون رباعياً دائرياً

٥) قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى ٠٠٠٠

٦) إذا كان الشكل الرباعى دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين فيه ٠٠٠٠

٧) إذا كان أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه ق (∠ ب) = ٨٠° فإن ق (∠ ء) = ٠٠٠٠

٨) إذا كان أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

فإن ق (∠ أ) = ٠٠٠٠ ، ق (∠ ء) = ٠٠٠٠

٩) يكون الشكل الرباعى دائرياً إذا وجدت نقطة تبعد عن كل رأس من رؤوسه ٠٠٠٠

١٠) يكون الشكل الرباعى دائرياً إذا كان قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوسه = ٠٠٠٠

١١) ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠ كل منهما رباعياً دائرياً

١٢) ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠ كل منهما ليس رباعياً دائرياً

١٣) شبه المنحرف ٠٠٠٠٠ دائرياً بينما شبه المنحرف المتساوى الساقين شكل ٠٠٠٠٠

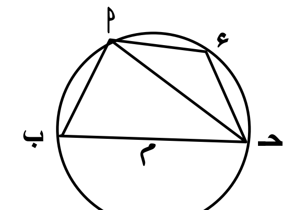
٨ – أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين ٠٠٠٠٠
[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان فى القياس ؛ متبادلتان]

٢) فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها ٠٠٠٠٠
[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان فى القياس ؛ متبادلتان]

٣) ٠٠٠٠٠ شكل رباعى دائرى [شبه المنحرف ؛ المعين ؛ متوازى الأضلاع ؛ المستطيل]

٤) فى الشكل المقابل :



إذا كان م دائرة ، ق (< حـ) = ١٢٠°

فإن ق (< ٮ) = ٠٠٠٠٠° [٢٤٠ ؛ ٦٠ ؛ ١٢٠ ؛ ١٨٠]

، ق (ٮحـ⌒) = ٠٠٠٠٠° [٢٤٠ ؛ ٦٠ ؛ ١٢٠ ؛ ١٨٠]



٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{\text{بحـ}}$ قطر فى م دائرة ، ق (< ء) = ١٢٠°

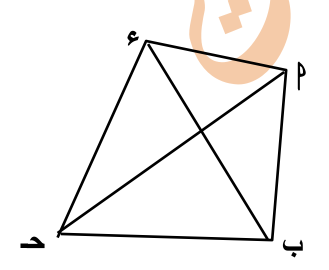
فإن ق (< ٮ حـ ب) = ٠٠٠٠٠°

[٦٠ ؛ ٣٠ ؛ ٩٠ ؛ ٥٠]

٦) فى الشكل المقابل : إذا كان ٮ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

، ٮ ب = ٮ ء ، ق (< ٮ ب ء) = ٧٠°

فإن ق (< حـ) = ٠٠٠٠٠° [٤٠ ؛ ٧٠ ؛ ١٤٠ ؛ ١١٠]



٧) فى الشكل المقابل : إذا كان ٮ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

، ق (< ب ٮ حـ) = ٤٠° ، ق (< ء ب حـ) = ٧٠°

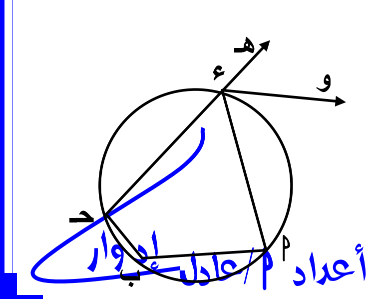
فإن ق (< ب حـ ء) = ٠٠٠٠٠°

[٤٠ ؛ ٧٠ ؛ ٣٠ ؛ ١١٠]

٩ – فى الشكل المقابل :

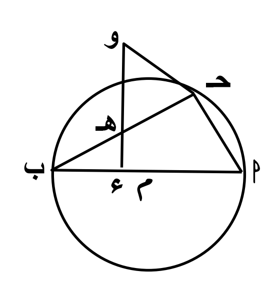
ٮ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، ء و // ٮ ب ، ق (< ء حـ ب) = ٩٨°



، ق (∠ هـ ء و) = ٣٨° أوجد ق (∠ ﻫ ب ﺟ)


١٠ – فى الشكل المقابل :

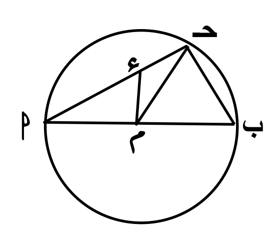


ﻫ ب قطر فى الدائرة م ، ء هـ ⊥ ﻫ ب

، ق (∠ و ﺟ هـ) = ق (∠ ﻫ) أثبت أن :

الشكل ﻫ ء هـ ﺟ رباعى دائرى ، و ﺟ = و هـ

١١ – فى الشكل المقابل :



ﻫ ب قطر فى الدائرة م ، ء م ⊥ ﻫ ب

إثبت أن ق (∠ ﻫ ء م) = ½ ق (∠ ﻫ م ﺟ)

١٢ – Δ س ص ع فيه ء ∈ س ع ، هـ ∈ س ص ، ق (∠ س هـ ع) = ق (∠ س ء ص)
أثبت أن الشكل هـ ص ع ء رباعى دائرى

١٣ – ﻫ ب ﺟ ء شكل رباعى فيه ﻫ ء // ب ﺟ ، س ∈ ﻫ ب ، ص ∈ ء ﺟ فإذا كان الشكل ﻫ س ص ء رباعى دائرى أثبت أن الشكل س ب ﺟ ص رباعى دائرى

١٤ – Δ ﻫ ب ﺟ متساوى الساقين فيه ﻫ ب = ﻫ ﺟ ، س ∈ ﻫ ب ، ص ∈ ﻫ ﺟ بحيث س ص // ب ﺟ أثبت أن الشكل س ب ﺟ ص رباعى دائرى

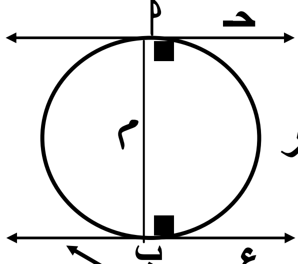
١٥ – دائرتان م ، ن متقاطعتان فى ﻫ ، ب رسم الوتر ﻫ ء فى الدائرة ن فإذا كان س منتصف ﻫ ء ، ﻫ ب ∩ م ن = { ص } أثبت أن الشكل ﻫ س ن ص رباعى دائرى

١٦ – Δ ﻫ ب ﺟ فيه ب هـ ينصف ∠ ﻫ ب ﺟ ، يقطع ﻫ ﺟ فى هـ ، ﺟ ء ينصف ∠ ﻫ ﺟ ب ، يقطع ﻫ ب فى ء فإذا كان ب هـ ∩ ﺟ ء = { م } ، ق (∠ ﻫ) = ٦٠°
أثبت أن الشكل ﻫ ء م هـ رباعى دائرى

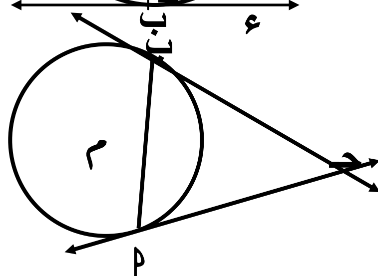
١٧ – ﻫ ب ﺟ ء شكل رباعى فيه ﻫ ب ⊥ ب ﺟ ، ﻫ ب = ﻫ ء ، ب ﺟ = ﺟ ء = ء ب
أثبت أن الشكل ﻫ ب ﺟ ء رباعى دائرى

العلاقة بين مماسات الدائرة

تمهيد :



(١) نعلم أن : المماسان المرسومان عند نهايتى قطر فى الدائرة متوازيان ما العلاقة بين المماسين المرسومين عند نهايتى وتر فى الدائرة لا يمر بمركزها ؟



(٢) فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ مماسان للدائرة م

قس طول كل من $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ماذا تلاحظ ؟

تسمى كل من $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعة مستقيمة مماسة

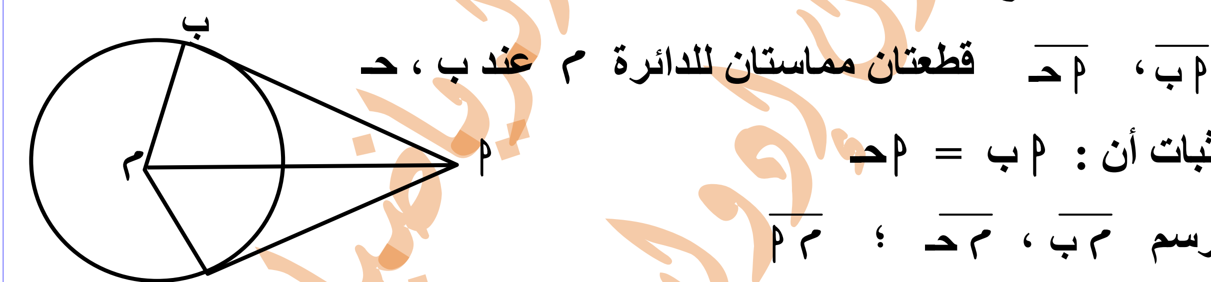
و تسمى $\overline{\text{أ ب}}$ وتر التماس

نـظريـة :

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول

المعطيات : أ نقطة خارج دائرة م ،

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ



المطلوب : إثبات أن : أ ب = أ حـ

العمـــل : نرسم $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م حـ}}$ ؛ $\overline{\text{م أ}}$

البرهان : ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مماسة للدائرة م ∴ ق (∠ أ ب م) = ٩٠°

، ∵ $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعة مماسة للدائرة م ∴ ق (∠ أ حـ م) = ٩٠°

∵ ΔΔ أ ب م ، أ حـ م

فيهما : ق (∠ أ ب م) = ق (∠ أ حـ م) = ٩٠°

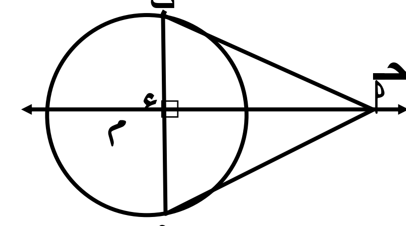
، ب م = حـ م = نق ، $\overline{\text{م أ}}$ ضلع مشترك

∴ Δ أ ب م ≡ Δ أ حـ م　　وينتج أن : أ ب = أ حـ

****

نتائج :

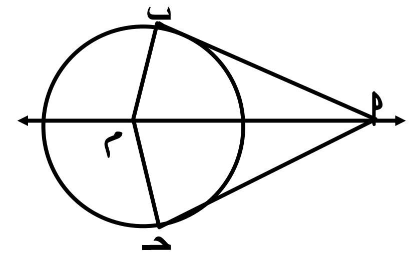
(١) المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محوراً لوتر التماس لهذين المماسيين



ففى الشكل المقابل : ٯب ، ٯحـ مماسين للدائرة م عند ب ، حـ

فإن : ٯم محور بحـ

و يكون : ٯم ⊥ بحـ ، ب ء = حـ ء



(٢) المستقيم المار بمركز الدائرة و نقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس

ففى الشكل المقابل : ٯب ، ٯحـ مماسين للدائرة م عند ب ، حـ

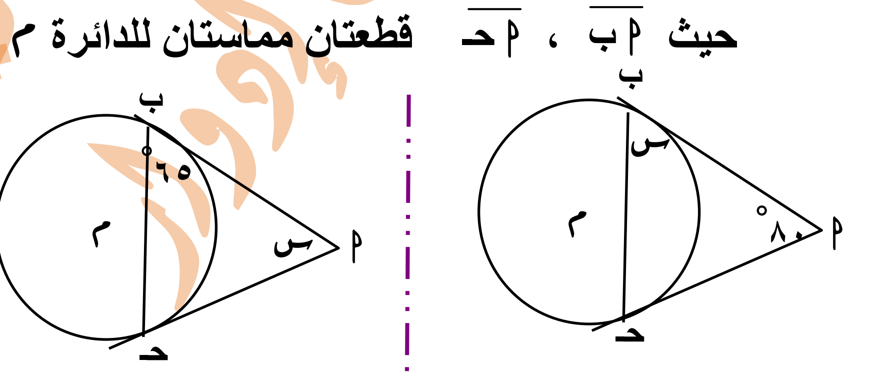
فإن : ٯم ينصف ∠ ٯ أى أن : ق (∠ ب ٯ م) = ق (∠ حـ ٯ م)

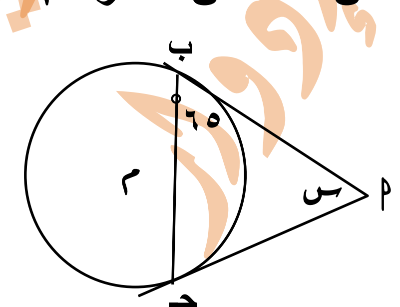
، ينصف ∠ ب م حـ أى أن : ق (∠ ٯ م ب) = ق (∠ ٯ م حـ)

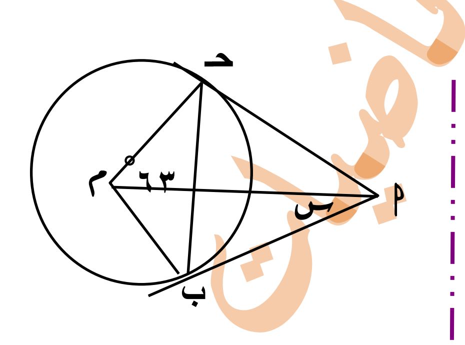
****

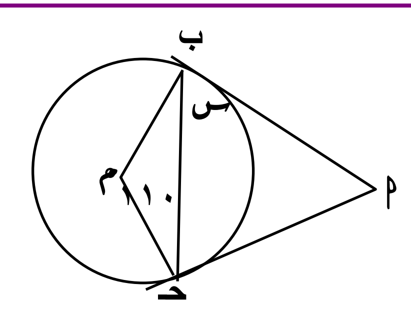
تدريب : أوجد قيمة س بالدرجات فى كل شكل من الأشكال الآتية :

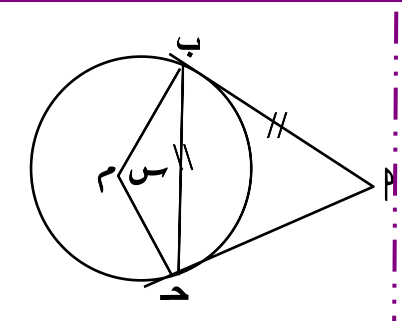
حيث ٯب ، ٯحـ قطعتان مماستان للدائرة م

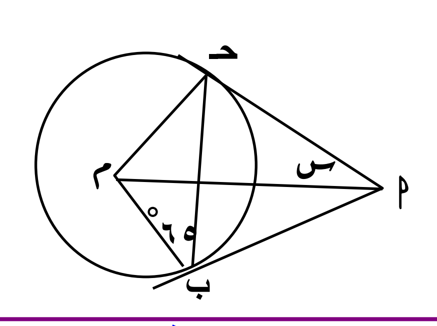








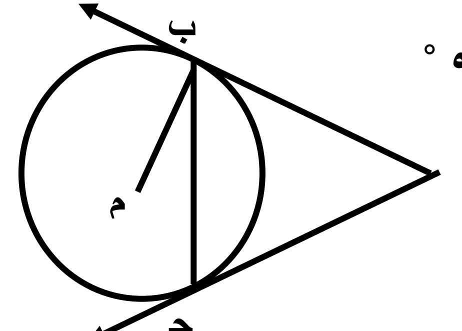




****

مثــ١ــال : فى الشكل المقابل : $\overline{\text{ﻡ ب}}$ ، $\overline{\text{ﻡ جـ}}$ قطعتان مماستان ق (∠ م ب جـ) = ٤٠ °

أوجد ق (∠ ﻡ)　　الحـــــــــل



∵ $\overline{\text{ﻡ ب}}$ مماس للدائرة م　　∴ ق (∠ﻡ ب م) = ٩٠ °

∴ ق (∠ﻡ ب جـ) = ٩٠ ° − ٤٠ ° = ٥٠ °

فى Δ ﻡ ب جـ　　∵ ﻡ ب = ﻡ جـ

∴ ق (∠ﻡ ب جـ) = ق (∠ﻡ جـ ب) = ٥٠ °

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠ °

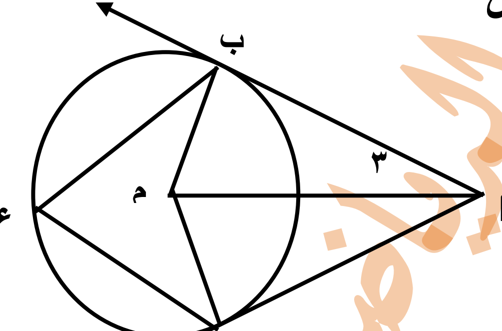
∴ ق (∠ﻡ) = ١٨٠ ° − [٥٠ ° + ٥٠ °] = ١٨٠ ° − ١٠٠ ° = ٨٠ °

****

مثــ٢ــال : فى الشكل المقابل $\overline{\text{ﻡ ب}}$ ، $\overline{\text{ﻡ جـ}}$ قطعتان مماستان ق (∠ ب ﻡ م) = ٣٠ °

أوجد : ق (∠جـ ﻡ م) ، ق (∠ ء)

الحـــــــــل



∵ $\overline{\text{ﻡ ب}}$ مماس　∴ ق (∠ﻡ ب م) = ٩٠ °

فى Δﻡ ب م

ق (∠ﻡ م ب) = ١٨٠ ° − [٣٠+٩٠] = ٦٠ °

∴ق (∠ب م جـ) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠ °

∴ ق (∠ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ب م جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠ ° = ٦٠ °

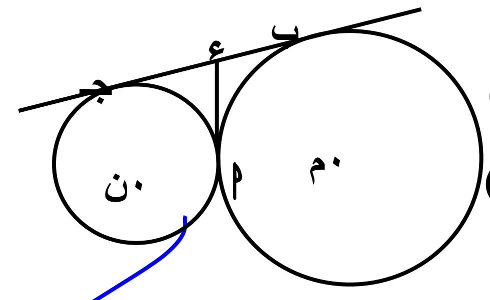
∴ ق (∠جـ ﻡ م) = ق (∠ب ﻡ م) = ٣٠ °

****

مثــ٣ــال : فى الشكل المقابل م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى ﻡ . $\overline{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرتين عند ب ، جـ . $\overleftarrow{\text{ﻡ ء}}$ مماس مشترك لهما عند ﻡ إثبت أن ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$



الحـــــــــل



$\overleftarrow{\text{ء ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء ﻡ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م　∴ ء ب = ء ﻡ　(١)

$\overleftarrow{\text{ء ﻡ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة ن　∴ ء جـ = ء ﻡ　(٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن　ب ء = ء جـ　　∴ ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

مثـ٤ـال : فى الشكل المقابل إذا كان : م ب ، م جـ قطعتان مماستان للدائرة م ، ق (∠ م ب جـ) = ٣٠° إثبت أن Δ م ب جـ متساوى الاضلاع

الحــــــل

∵ م ب مماس للدائرة م عند ب ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

∴ ق (∠ م ب جـ) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

∵ م ب ، م جـ قطعتان مماستان ∴ م ب = م جـ

∴ ق (∠ م جـ ب) = ق (∠ م ب جـ) = ٦٠°

مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (∠ م) = ١٨٠° − [٦٠° + ٦٠°] = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

فى Δ م ب جـ : ق (∠ م) = ق (∠ م ب جـ) = ق (∠ م جـ ب)

∴ Δ م ب جـ متساوى الاضلاع

****

مثـ٥ـال : فى الشكل : م ب ، م جـ قطعتان مماستان للدائرة م . ق (∠ م م جـ) = ٦٠°

(١) أوجد ق (∠ م) (٢) إثبت أن : م م = ٢ نق

الحــــــل

∵ م جـ مماس للدائرة م عند جـ ∴ ق (∠ م جـ م) = ٦٠°

∴ ق (∠ جـ م م) = ١٨٠ − [٩٠° + ٦٠] = ٣٠°

ق (∠ب م م) = ق (∠ جـ م م) = ٣٠°

∴ ق (∠ م) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

فى Δ م ب م ∵ م ب مماس ∴ ق (∠ م ب م) = ٩٠°

ق (∠ب م م) = ٣٠ ° ∴ ب م = $\frac{1}{2}$ م م

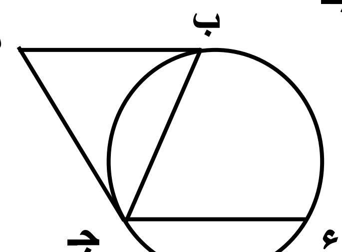
∴ م م = ٢ ب م = ٢ نق

****

مثـ٦ـال : فى الشكل المقابل م ب ، م جـ قطعتان مماستان ، جـ ء // م ب

إثبت أن : جـ ب ينصف ق (∠ م جـ ء)

الحــــــل



∵ $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ أ ب = أ جـ

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب) (١)

∵ $\overleftarrow{جـ ء}$ // $\overleftarrow{أ ب}$

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ ب جـ ء) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ∴ ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ ب جـ ء)

∴ $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ينصف ق (∠ أ جـ ء)

****

مثـال٧ : فى الشكل المقابل : Δ أ ب جـ يمس الدائرة من الخارج فى س ، ص ، ع

فإذا كان أ س=٢سم ، ب ص = ٤سم ، جـ ع = ٣ سم أوجد محيط Δ أ ب جـ

الحـــــــل



∵ $\overleftarrow{أ س}$ ، $\overleftarrow{أ ع}$ قطعتان مماستان ∴ أ س = أ ع = ٢ سم

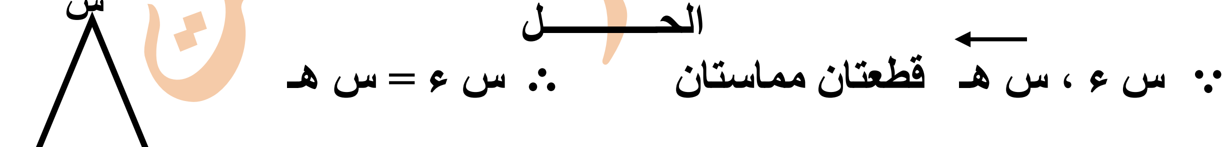
∵ $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$ قطعتان مماستان ∴ ب س = ب ص = ٤سم

∵ $\overleftarrow{جـ ع}$ ، $\overleftarrow{جـ ص}$ قطعتان مماستان ∴ جـ ص = جـ ع = ٣ سم

∴ محيط Δ أ ب جـ = ٦ + ٧ + ٥ = ١٨ سم

****

مثـال٨ : فى الشكل المقابل س ص ع مثلث ، $\overleftarrow{س ص}$ ، $\overleftarrow{س ع}$ تمسان الدائرة م عند ء ، هـ



فإذا كان ء هـ // $\overleftarrow{ص ع}$ إثبت أن الشكل ء ص ع هـ رباعى دائرى

الحـــــــل

∵ س ء ، $\overleftarrow{س هـ}$ قطعتان مماستان ∴ س ء = س هـ

∴ ق (∠ س ء هـ) = ق (∠ س هـ ء) (١)

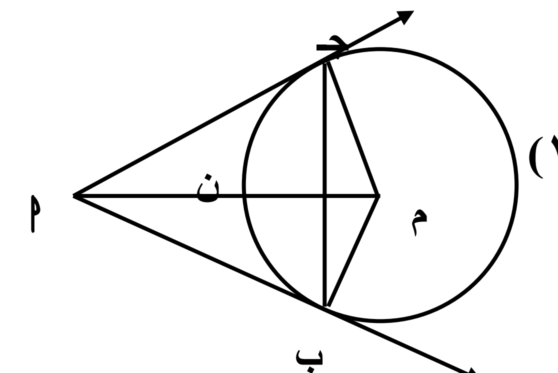
∵ ء هـ // $\overleftarrow{ص ع}$ ∴ ق (∠س ء هـ) = ق (∠ ص) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠س هـ ء) = ق (∠ص)

∴ الشكل ء ص ع هـ رباعى دائرى

****

مثـ٩ـال : فى الشكل المقابل أ جـ ، أ ب يمسان الدائرة م ، ب أ = ب جـ
أوجد : ق (∠ م أ ب)



الحــــــل

∵ أ ب ، أ جـ مماسا ∴ أب = أ جـ (١)

∴ أ ب = ب جـ (معطى) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن أ ب = ب جـ = أ جـ

∴ أ ب جـ متساوى الاضلاع

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أجـ ب) = ق (∠أ) = ٦٠°

∴ أ م ينصف ب أ جـ ∴ ق (∠ م أ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠° = ٣٠°

****

مثـ١٠ـال : فى الشكل المقابل دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، ب جـ مماس مشترك لهما إثبت أن : ق (∠ ب أجـ) = ٩٠°

الحــــــل


العمل : نرسم مماس مشترك لهما يقطع ب جـ فى ء


∵ ء ب ، ء أ مماسان للدائرة م ∴ ء ب = ء أ

∴ ق (∠ ء ب أ) = ق (∠ء أ ب) (١)

∵ ء جـ ، ء أ مماسان للدائرة ن ∴ ء جـ = ء أ

∴ ق (∠ء جـ أ) = ق (∠ء أ جـ) (٢)

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن

ق (∠ ء أ ب) + ق (∠ ء أجـ) = ق (∠ ء ب أ)+ ق (∠ء جـ أ)

∴ ق (∠ب أ جـ) = ق (∠ ء ب أ)+ ق (∠ء جـ أ)

∴ ق (∠ب أ جـ) = ٩٠°

****



المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين :

(١) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ﺃ ﺏ}}$ مماس مشترك داخلى للدائرتين م ، ن

لأن الدائرتين م ، ن تقعان فى جهتين مختلفتين من $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ﺏ}}$

أيضاً : $\overleftrightarrow{\text{ﺟ ء}}$ مماس مشترك داخلى للدائرتين م ، ن

نلاحظ : $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ﺏ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ﺟ ء}}$ = { هـ }

، أ ب = جـ ء " لماذا ؟؟؟ "

(٢) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ﺃ ﺏ}}$ مماس مشترك خارجى للدائرتين م ، ن

لأن الدائرتين م ، ن تقعان فى جهة واحدة من $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ﺏ}}$

أيضاً : $\overleftrightarrow{\text{ﺟ ء}}$ مماس مشترك خارجى للدائرتين م ، ن

نلاحظ : $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ﺏ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ﺟ ء}}$ = { هـ }

، أ ب = جـ ء " لماذا ؟؟؟ "

تدريب : أذكر عدد المماسات لدائرتين متباعدتين

****

مثـــال ١١ : فى الشكل: $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ﺏ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ﺟ ء}}$ مماسان للدائرتين م ، ن إثبت أن: أ ب = جـ ء

الحـــــــــل

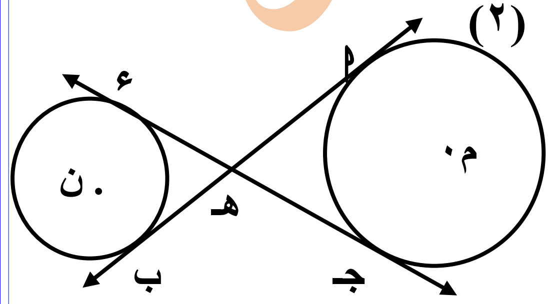
∵ $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ﺃ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ﺟ}}$ مماسان للدائرة م ∴ هـ أ = هـ جـ (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ﺏ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ء}}$ مماسان للدئرة ن ∴ هـ ب = هـ ء (٢)

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن

∴ هـ أ + هـ ب = هـ جـ + هـ ء

∴ أ ب = جـ ء (وهو المطلوب إثباته)



****

مثـ١٢ـال : فى الشكل المقابل ↔أ ب ، ↔جـ ء مماسان للدائرتين م ، ن إثبت أن أ ب = جـ ء

الحـــــــــل



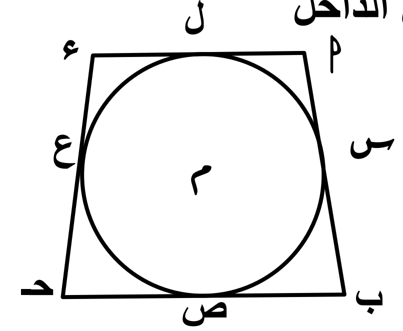
∵ ↔هـ أ ، ↔هـ جـ مماسان للدائرة م ∴ هـ أ = هـ جـ (١)

∵ ↔هـ ب ، ↔هـ ء مماسان للدئرة ن ∴ هـ ب = هـ ء (٢)

بطرح ١ من ٢ ينتج أن

∴ هـ أ ـ هـ ب = هـ جـ ـ هـ ء

∴ أ ب = جـ ء (وهو المطلوب إثباته)



****

تعريف :

الدائرة الداخلة لمضلع : هى الدائرة التى تمس جميع أضلاعه من الداخل

م مركز الدائرة الداخلة للمضلع أ ب حـ ء

لأنـها تمس أضلاعه من الداخل فى س ، ص ، ع ، ل

ملاحظات :

الدائرة الداخلة لمثلث : هى الدائرة التى تمس جميع أضلاعه من الداخل

مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

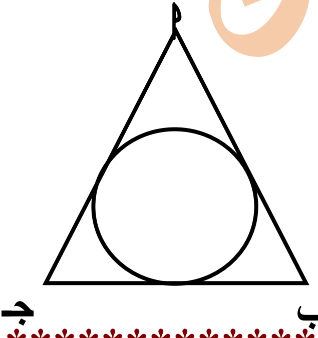
****

الدائرة الداخلة للمثلث

الدائرة الداخلة لمثلث هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل

إذا كانت الدائرة م تمس أضلاع المثلث أ ب جـ من الداخل

فإنها تسمى دائرة داخلة للمثلث



****

تمرين مشهور

مركز الدائرة الداخلة لاى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه

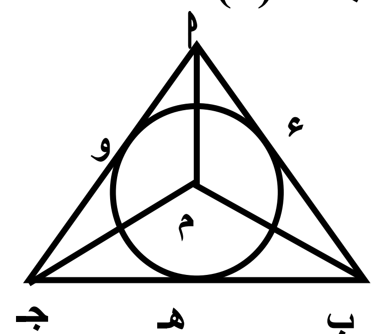
المعطيات : الدائرة م داخلة للمثلث ﻡ ب جـ

المطلوب : إثبات أن م هى نقطة تقاطع منصفات زواياه

البرهان : ∵ ﻡ ء ، ﻡ و قطعتان مماستان　∴ ﻡ م ينصف ∠ب ﻡ جـ　(١)



∵ ب ء ، ب هـ قطعتان مماستان　∴ ب م ينصف ∠ﻡ ب جـ　(٢)



جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان

∴ جـ م ينصف ∠ﻡ ب جـ　(٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

م هى نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث ﻡ ب جـ الداخلة

****

مثـ١ـال : فى الشكل المقابل إذا كانت الدائرة م الداخلة للمثلث ﻡ ب جـ تمس أضلاعه فى ء ، هـ ، و أوجد قياسات زوايا Δ ﻡ ب جـ

الحـــــــل



∵ $\overleftarrow{ب ء}$ ، $\overleftarrow{ب هـ}$ قطعتان مماستان

∴ ق (∠م ء هـ) = ٩٠° ، ق (∠م هـ ب) = ٩٠°



∴ الشكل ء ب هـ م رباعى دائرى

∴ ق (∠ب) + ق (∠ء م هـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ب) = ١٨٠ – ١٤٠ = ٤٠°

∵ $\overleftarrow{جـ هـ}$ ، $\overleftarrow{جـ و}$ قطعتان مماستان

∴ ق (∠جـ هـ م) = ٩٠° ، ق (∠جـ و م) = ٩٠°

∴ الشكل م هـ جـ و رباعى دائرى

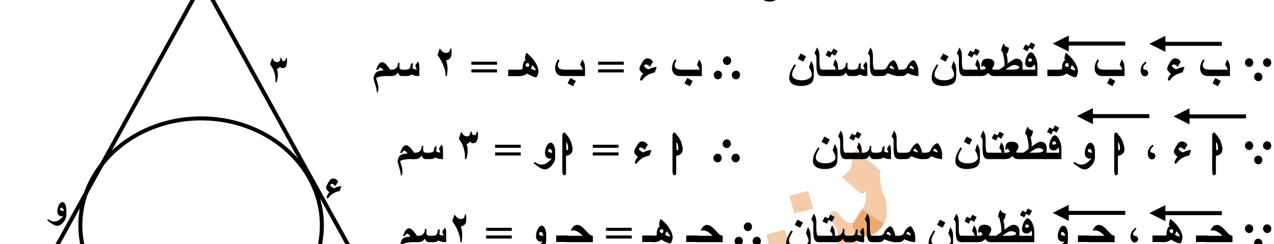
∴ ق (∠م هـ جـ) + ق (∠جـ) = ١٨٠°　∴ ق (∠جـ) = ١٨٠ – ١٠٠ = ٨٠°

∵ مجموع زوايا المثلث أ ب جـ = ١٨٠°

∴ ق (∠ﻡ) = ١٨٠° – [٨٠ + ٤٠] = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

****

مثـ٢ـال : فى الشكل المقابل ﻫ ب جـ مثلث خارج دائرة تمس أضلاعه فى ء ، هـ ، و
أحسب طول ب جـ ، ﻫ جـ



الحـــــــــــــــل

∵ ب ء ، ب هـ قطعتان مماستان ∴ ب ء = ب هـ = ٢ سم

∵ ﻫ ء ، ﻫ و قطعتان مماستان ∴ ﻫ ء = ﻫو = ٣ سم

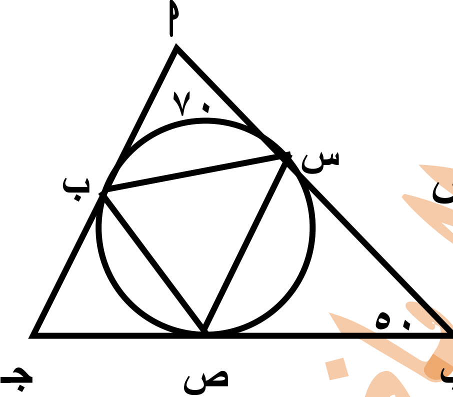
∵ جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان ∴ جـ هـ = جـ و = ٢سم

∴ ب جـ = ٢سم + ٢ سم = ٤ سم

∴ ﻫ جـ = ٣ سم + ٢ سم = ٥ سم

****

مثـ٣ـال : فى الشكل المقابل دائرة م مرسومة داخل Δ ﻫ ب جـ ، ﻫ (∠ﻫ) = ٧٠ ° ،
ﻕ (∠ب) = ٥٠ ° أوجد ﻕ (∠ص س ع)



الحـــــــل

∵ب س ، ب ص قطعتان مماستان ∴ ب س = ب ص

∴ ﻕ (∠ب س ص) = ﻕ (∠ب ص س)

$= \frac{١٨٠ - ٥٠}{٢} = \frac{١٣٠}{٢} = ٦٥°$

∵ﻫ س ، ﻫ ع قطعتان مماستان ∴ ﻫس = ﻫ ع

∴ ﻕ (∠ﻫ س ع) = ﻕ (∠ﻫ ع س) $= \frac{١٨٠ - ٧٠}{٢} = \frac{١١٠}{٢} = ٥٥°$

∴ﻕ (∠ص س ع) = ١٨٠° − [٦٥° + ٥٥°] = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

****

مثـ٤ـال : فى الشكل المقابل : Δ ﻫ ب حـ مرسوم خارج دائرة فإذا كان : ﻫ س = ٥ سم ،
ب س = ٦ سم ، ص حـ = ٧ سم أوجد محيط Δ ﻫ ب حـ ، إذا كان طول قطر
الدائرة ٨ سم أوجد مساحة Δ ﻫ ب حـ



الحــــــــل

∵ ﻫ س ، ﻫ ع قطعتان مماستان للدائرة م عند س، ع

∴ ﻫ س = ﻫ ع = ٥ سم

بالمثل ب ص = ب س = ٦ سم ،

حـ ص = حـ ع = ٧ سم

∴ محيط ∆ ٢ ب حـ = ٢ (٥ + ٦ + ٧) = ٣٦ سم

مساحة ∆ ٢ ب حـ

= مساحة ∆ م ب حـ + مساحة ∆ م ب ٢ + مساحة ∆ م ٢ حـ

= $\frac{1}{2}$ × ب حـ × نق + $\frac{1}{2}$ × ٢ ب × نق + $\frac{1}{2}$ × ٢ حـ × نق

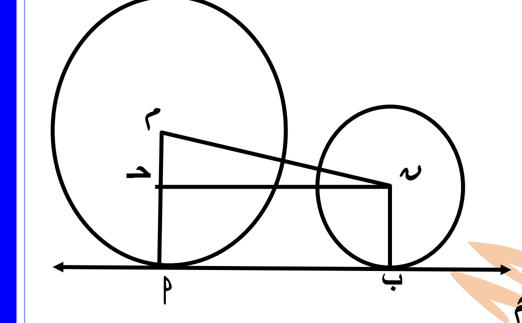
= $\frac{1}{2}$ × نق × (ب حـ + ٢ ب + ٢ حـ) = $\frac{1}{2}$ × ٤ × (١٣ + ١١ + ١٢)

= ٢ × ٣٦ = ٧٢ سم٢

****

مثــال : فى الشكل المقابل : ٢ب↔ مماس مشترك للدائرتين م ، ں و طولا نصفى قطريهما ١٧ ، ٨ سم على الترتيب ، م ں = ٤١ سم أوجد طول ٢ب

الحـــــــل



نرسم ں حـ // ٢ب

∴ ں حـ ⊥ ٢ م ، ں حـ = ٢ ب

، م حـ = ١٧ – ٨ = ٩ سم

من ∆ م ں حـ " بإستخدام نظرية فيثاغورث "

ينتج : ں حـ = ٤٠ سم ∴ ٢ ب = ٤٠ سم

****



تمارين

١ – أكمل ما يأتى :

١) القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجها ٠٠٠٠

٢) قياس الزاوية المحصورة بين مماس و نصف قطر مار بنقطة التماس = ٠٠٠٠٠°

٣) إذا كان ل١ ، ل٢ مماسان مرسومان من نهايتى قطر فى دائرة فإن ل١ ∩ ل٢ = ...

٤) المستقيم المار بمركز الدائرة والنقطة المرسوم منها المماسين خارج الدائرة يكون ٠٠٠٠ لوتر التماس لهذين المماسين

٥) إذا مر مستقيم بمركز دائرة ونقطة تقاطع مماسين لها فإنه ينصف كلاً من ٠٠٠٠

٦) الدائرة الداخلة لمثلث هى الدائرة التى ٠٠٠٠

٧) مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع ٠٠٠٠

٢ – أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة يكونان ٠٠٠٠٠

[متقاطعان ؛ متعامدان ؛ متساويان ؛ متوازيان]

٢) عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها لدائرتين متقاطعتين ٠٠٠٠٠

[١ ؛ ٢ ؛ ٣ ؛ ٤]

٣) المماسان المرسومان من نهايتى وتر فى الدائرة يكونان ٠٠٠٠٠

[متقاطعان أ؛ متعامدان أ؛ متساويان أ؛ متوازيان]

٤) عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها لدائرتين متباعدتين ٠٠٠٠٠

[١ ؛ ٢ ؛ ٣ ؛ ٤]

٥) عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها لدائرة من نقطة خارجها ٠٠٠٠٠

[١ ؛ ٢ ؛ ٣ ؛ ٤]

٦) عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها لدائرة من نقطة عليها ٠٠٠٠٠

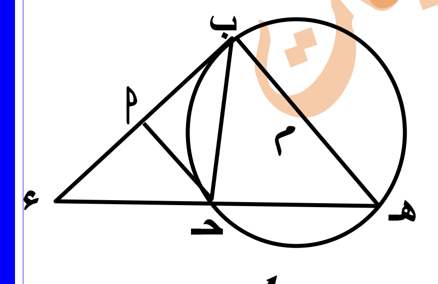
[١ ؛ ٢ ؛ ٣ ؛ ٤]

٣ – فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى أضلاعه تمس الدائرة م التى طول قطرها ٦ سم ، ء هـ = ٤ سم ، ص حـ = ٢ سم ، س ب = ٥ سم ، أ و = ٣ سم أثبت أن : أ ب + حـ ء = أ ء = حـ ب

ثم أوجد : محيط ومساحة الشكل أ ب حـ ء

٤ – فى الشكل المقابل :

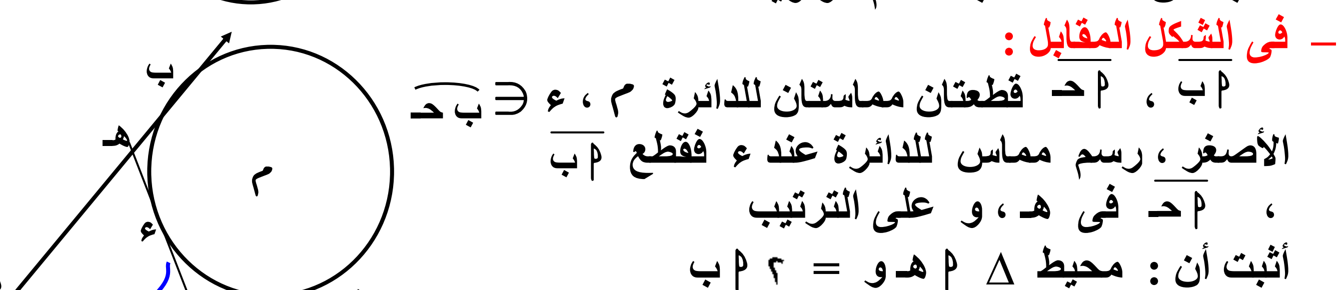


أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة م ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ بحيث أ ب = أ ء رسم $\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ فقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن △ ء هـ ب قائم الزاوية



٥ – فى الشكل المقابل :



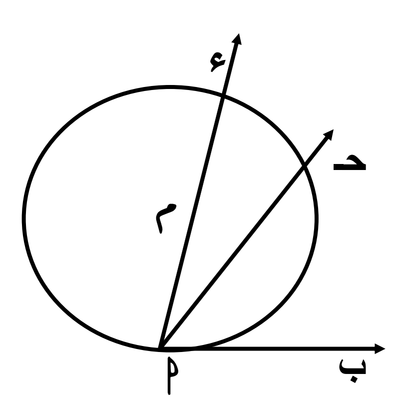
أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة م ، ء ∈ $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$ الأصغر ، رسم مماس للدائرة عند ء فقطع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ فى هـ ، و على الترتيب

أثبت أن : محيط △ أ هـ و = ٢ أ ب

الزاوية المماسية

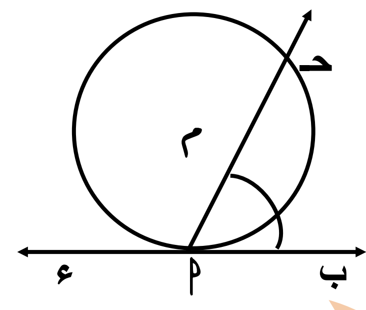
تمهيد : فى الشكل المقابل :

< حـ ؟ ب زاوية محيطية ضلعاها ؟حـ ، ؟ء



و قوسها ⌒حـ ء ، إذا كان ؟ب مماس للدائرة عند ؟ ، و دار أحد ضلعى الزاوية المحيطية و ليكن ؟حـ مبتعداً عن ؟ء حتى أنطبق على ؟ب ينتج من ذلك : أكبر زاوية محيطية فى القياس ، و تسمى < ء ؟ ب زاوية مماسية و هى حالة خاصة من الزاوية المحيطية و بالتالى يكون :

ق (< ء ؟ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒ء حـ)



الزاوية المماسية :

هى الزاوية المكونة من إتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والآخر يحمل وتراً فى الدائرة يمر بنقطة التماس

- قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

ففى الشكل المقابل : ق (< ب ؟ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒ب حـ)

****

نظرية : قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

المعطيات : < ؟ ب حـ زاوية مماسية ، < ء زاوية محيطية

المطلوب : إثبات أن : ق (< ؟ ب حـ) = ق (< ء)

البرهان : ∵ < ؟ ب حـ زاوية مماسية

∴ ق (< ؟ ب ء) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒؟ ب) (١)

، ∵ < ء زاوية محيطية

∴ ق (< ء) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒؟ ب) (٢)

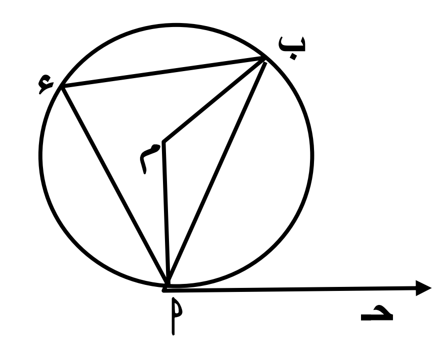
من (١) ، (٢) ينتج أن : ق (< ٩ ب حـ) = ق (< ء)

نتيجة : قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

فى الشكل المقابل :



٩ حـ ماس للدائرة م ، ٩ ب وتر التماس



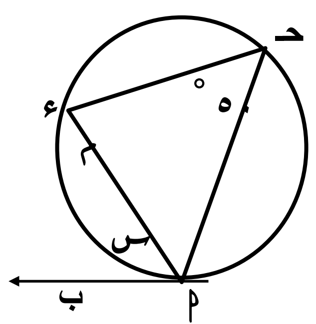
∴ ق (< ب ٩ حـ) = ق (< ء)

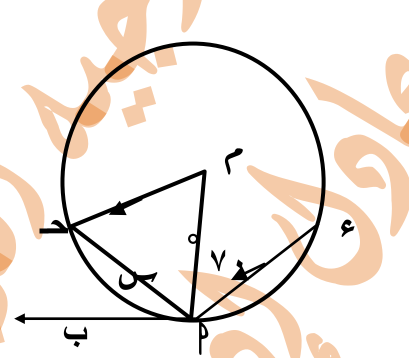
∵ ق (< ء) = ½ ق (< ٩ م ب)

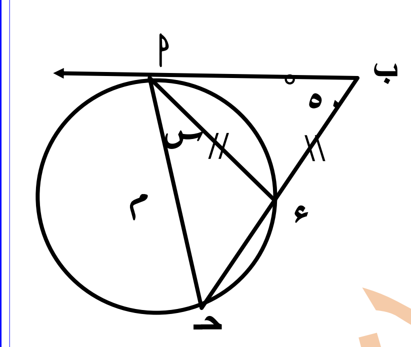
∵ ق (< ب ٩ حـ) = ق (< ٩ م ب)

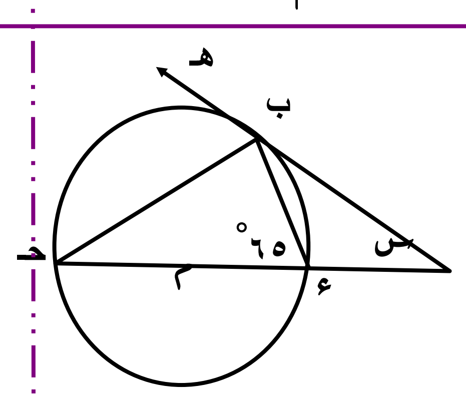
****

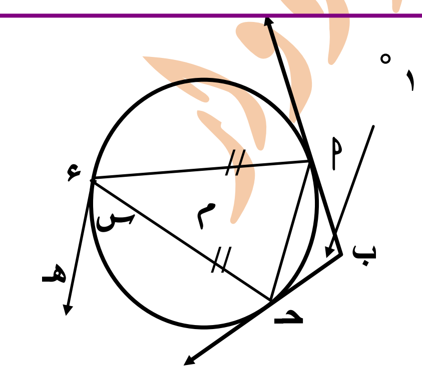
تدريب : أوجد قيمة س بالدرجات فى كل شكل من الأشكال الآتية : حيث ٩ ب مماس للدائرة م

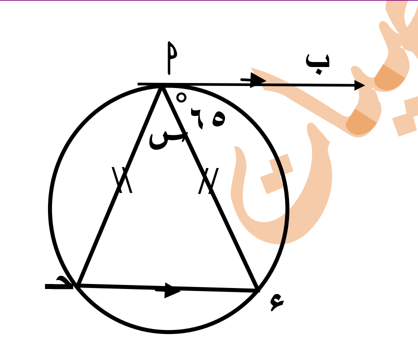








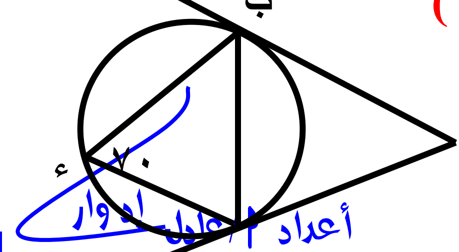




****

مثـــ١ـــال : فى الشكل المقابل ٩ ب ، ٩ جـ مماسان للدائرة م عند ب ، جـ

ق (< ب ء جـ) = ٧٠° أوجد بالبرهان ق (< ٩)



∵ ق (< ٩ جـ ب) = ق (< ب ء جـ)

[مماسية ومحيطية مرسومة على وتر التماس]

∴ ق (∠ م جـ ب) = ٧٠ °

م ب ، م جـ مماسان ∴ م ب = م جـ

∴ ق (∠ م جـ ب) = ق (∠ م ب جـ) = ٧٠ °

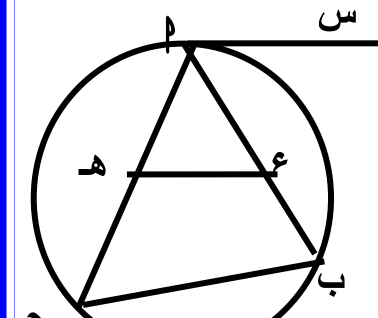
∴ ق (∠ م) = ١٨٠° – [٧٠ ° + ٧٠ °] = ١٨٠ ° – ١٤٠ ° = ٤٠ °

****

مثـ٢ـال : فى الشكل المقابل م س مماس للدائرة عند م ، ء هـ // م س

إثبت أن الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى

الحـــــــل



∵ م س مماس ∴ ق (∠س م ب) = ق (∠ جـ) (١)

∵ م س // ء هـ ∴ ق (∠س م ب) = ق (∠م ء هـ) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ق (∠م ء هـ) = ق (∠جـ) [خارجة تساوى المقابلة للمجاورة لها]

∴ الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى

****

مثـ٣ـال : فى الشكل المقابل م س مماس ، ق (∠س م ب) = ٤٠ ° ،

ق (∠م ب جـ) = ١١٠ ° أوجد : ق (∠جـ ء ب)

الحـــــــل

∵م س مماس ∴ ق (∠م جـ ب) = ق (∠ س م ب) = ٤٠°

∵ مجموع قياسات زوايا Δ م ب جـ = ١٨٠°

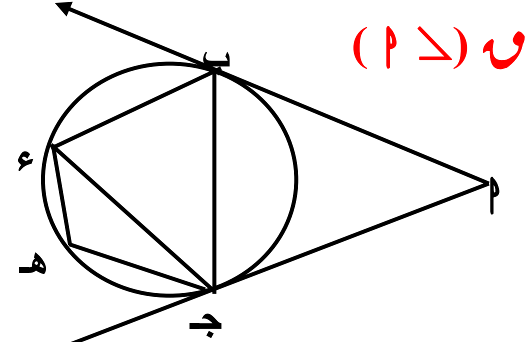
∴ق (∠ ب م جـ) = ١٨٠° – [١١٠ + ٤٠] = ١٨٠ – ١٥٠ = ٣٠°

∴ ق (∠ جـ ء ب) = ق (∠ب م جـ) [محيطيتان تشتركان فى القوس]

∴ (∠ جـ ء ب) = ٣٠ °

****

مثـ٤ـال : فى الشكل المقابل ←أ ب ، ←أ جـ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ، جـ ب = جـ ء
إثبت أن ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ء ب جـ)
وإذا كان ق (∠ جـ هـ ء) = ١١٠° أوجد ق (∠ أ)



الحـــــــــل

∵ ←أ ب مماس
∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠جـ ء ب) (١)
∵ جـ ب = جـ ء
∴ ق (∠ء ب جـ) = ق (∠جـ ء ب) (٢)
من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ء ب جـ) وهو المطلوب (١)
إذا كان ق (∠جـ هـ ء) = ١١٠°
∴ ق (∠جـ ب ء) = ١٨٠° – ١١٠° = ٧٠°
لان ب جـ هـ ء رباعى دائرى ∴ ق (∠ أ ب جـ) = ٧٠°
∵ ←أ ب ، ←أ جـ مماسان ∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب) = ٧٠°
∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° – [٧٠ + ٧٠] = ١٨٠° – ١٤٠ = ٤٠°

****

مثـ٥ـال : فى الشكل المقابل ←س ص ، ←س ع مماسان للدائرة عند ص ، ع ، ق (∠ص س ع) = ٨٠° ق (∠هـ ل ع) = ١٣٠° إثبت أن
(١) ع هـ = ع ص (٢) ←س ع // ←ص هـ

الحـــــــــل

∵ ←س ص ، ←س ع مماسان
∴ ق (∠ س ص ع) = ق (∠ س ع ص) = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°
ق (∠ص هـ ع) = ق (∠ س ع ص) = ٥٠°
∵ الشكل ل هـ ص ع رباعى دائرى
∴ ق (∠ ل) + ق (∠هـ ص ع) = ١٨٠°

ل
ع
هـ
١٣٠
٨٠
س
ص
و

∴ ق (∠هـ ص ع) = ١٨٠° ــ ١٣٠° = ٥٠°

ق∵ (∠ص هـ ع) = ق (∠هـ ص ع)　　∴ ع هـ = ع ص

ق (∠س ع ص) = ق (∠هـ ص ع) = ٥٠°　[وهما متبادلتان]

∴ س ع // ص هـ

****

مثـ٦ـال : فى الشكل المقابل و ا ، و ب يمسان الدائرة عند ا ، ب .　ا ب // جـ ء

، ق (∠ا ء جـ) = ١٠٠° ، ق (∠ا جـ ء) = ٥٠°

أوجد : ق (∠ا ب جـ) ، ق (∠جـ ب هـ) ، ق (∠ا و ب)

الحـــــــل



∵ الشكل ا ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (∠ا ء جـ) + ق (∠ا ب جـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ا ب جـ) = ١٨٠ ــ ١٠٠ = ٨٠°

فى Δ ا جـ ء

∵ ق (∠ب ا ء) = ١٨٠ ــ [١٠٠+٥٠]=٣٠°

∵ ا ب // جـ ء　∴ ق (∠ب ا جـ) = ق (∠ا جـ ء) [متبادلتان]

∴ ق (∠ب ا جـ) = ٥٠°

ق (∠جـ ب هـ) = ق (∠ب ا جـ) = ٥٠°

∴ ق(∠ا ب و) = ١٨٠° ــ [٨٠+٥٠]=٥٠°　　∴ و ا = و ب

∴ ق (∠و ا ب) = ق (∠و ب ا) = ٥٠°

∴ ق (∠ا و ب) = ١٨٠° ــ [٥٠+٥٠] = ١٨٠ ــ ١٠٠ = ٨٠°

****

مثـ٧ـال : فى الشكل المقابل ا ب ، ا جـ يمسان الدائرة عند ب ، جـ　ا جـ // ب ء

، ق (∠ا) = ٤٠° أوجد ق (∠ا جـ ب) ، ق (∠هـ جـ ء) ، ثم أثبت أن جـ ب = جـ ء

الحـــــل

∵ ٩ب ، ٩جـ مماسان ∴ ٩ب = ٩جـ

ق (∠٩جـ ب) = ق (∠٩ب جـ) = $\frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠°

ق (∠جـ ء ب) = ق (∠ ٩ ب جـ) = ٧٠°

∵ ٩جـ // ب ء

∴ق (∠جـ ب ء) = ق (∠٩ جـ ب) = ٧٠° [متبادلتان]

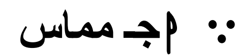
∴ ق (∠هـ جـ ء) = ق (∠جـ ب ء) = ٧٠° [مماسية ومحيطية]

فى Δ جـ ب ء ∵ ق (∠جـ ب ء) = ق (∠جـ ء ب) = ٧٠° ∴ جـ ب = جـ ء

****

مثــ٨ــال : فى الشكل المقابل جـ ء مماس للدائرة عند جـ ، ء هـ // أ جـ
إثبت أن ب هـ جـ ء رباعى دائرى

الحــــــــل


∵ ٩جـ مماس

∴ ق (∠ب جـ ء) = ق (∠٩) [مماسية ومحيطية] (١)

∵ ء هـ // ٩ جـ

∴ ق (∠ب هـ ء) = ق (∠٩) [متناظرتان] (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (∠ب جـ ء) = ق (∠ب هـ ء)

[وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة]

∴ الشكل ب هـ جـ ء رباعى دائرى

****

مثــ٩ــال : فى الشكل المقابل ٩ب قطر فى نصف دائرة ، جـ و مماس ء و ⊥ ٩ ب برهن أن
(١) الشكل ٩ ء هـ جـ رباعى دائرى (٢) Δ و جـ هـ متساوى الساقين
(٣) عين مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل ٩ ء هـ جـ

الحــــــــل

∵ ٩ب قطر ∴ ق (∠٩ جـ ب) = ٩٠°

∵ هـ ء ⊥ ٩ ب ∴ ق (∠هـ ء ٩) = ٩٠°

∴ ق (∠٩ جـ ب) + ق (∠هـ ء ٩) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

∴ الشكل ﺃ ء هـ جـ شكل رباعى دائرى

∴ ق (∠و جـ هـ) = ق (∠ﺃ) [مماسية ومحيطية](١)

∴ ق (∠و هـ جـ) = ق (∠ﺃ) [خارجة عن الرباعى الدائرى](٢)

من ١ ، ٢ ينتج ان ق (∠ و جـ هـ) = ق (∠ و هـ جـ)

∴ Δ و جـ هـ متساوى الساقين

****

مثـ١٠ـال : فى الشكل المقابل $\overline{ﺃب}$ ، $\overline{ﺃجـ}$ مماسان للدائرة م ، ق (∠ب ﺃ جـ) = ٤٠°

أوجد ق (∠ ﺃ ب جـ) ، ق (∠ ب ء جـ) ، ق (∠ ﺃ م جـ)

الحـــــــل

∵ $\overline{ﺃب}$ ، $\overline{ﺃجـ}$ مماسان ∴ ﺃ ب = ﺃ جـ

∴ ق (∠ ﺃ ب جـ) = ق (∠ﺃجـ ب) = $\frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∴ ق (∠ب ء جـ) = ق (∠ﺃ جـ ب) [مماسية ومحيطية

∴ ق (∠ب ء جـ) = ٧٠°

∵ $\overline{ﺃجـ}$ مماس ، $\overline{مجـ}$ نصف قطر ∴ ق (∠ م جـ ﺃ) = ٩٠°

∵ $\overrightarrow{ﺃم}$ ينصف ∠ ب ﺃ م ∴ ق (∠م ﺃ جـ) = ق (∠ م ﺃ ب) = ٢٠°

∴ ق (∠ﺃ م جـ) = ١٨٠ – [٩٠ + ٢٠] = ١٨٠ – ١١٠ = ٧٠°

****

مثـ١١ـال : فى الشكل المقابل $\overleftrightarrow{ﺃء}$ مماس للدائرة م عند ﺃ ، $\overline{ب جـ}$ قطر ، $\overline{ب ء}$ ⊥ $\overline{ﺃ ء}$

إثبت أن : ق (∠ﺃ ب ء) = ق (∠ﺃ ب جـ)

الحـــــــل

∵ $\overline{ب جـ}$ قطر ∴ ق (∠ب ﺃجـ) = ٩٠°

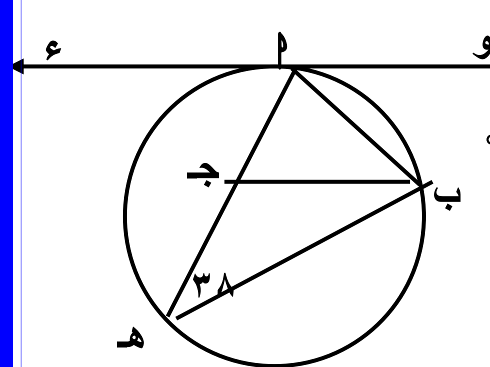
∵ $\overleftrightarrow{ﺃ ء}$ مماس ∴ ق (∠ ء ﺃ ب) = ق (∠ﺃ جـ ب)

ΔΔ ﺃء ب ، ﺃ ب جـ فيهما

(١) ق (∠ﺃ ء ب) = ق (∠ب ﺃ جـ) = ٩٠°

(٢) ق (∠ء ﺃ ب) = ق (∠ﺃجـ ب) ∴ ق (∠ﺃ ب ء) = ق (∠ﺃ ب جـ)

مثـ١٢ــال : فى الشكل المقابل ؤ‏ء مماس للدائرة م عند ؤ ، ق (∠هـ) = ٣٨°
ؤ ء // ب جـ أوجد : ق (∠ؤ ب جـ)



الحـــــــــل

∵ ؤ ء مماس ∴ ق (∠و ؤ ب) = ق (∠هـ) = ٣٨°

∵ ؤ ء // ب جـ

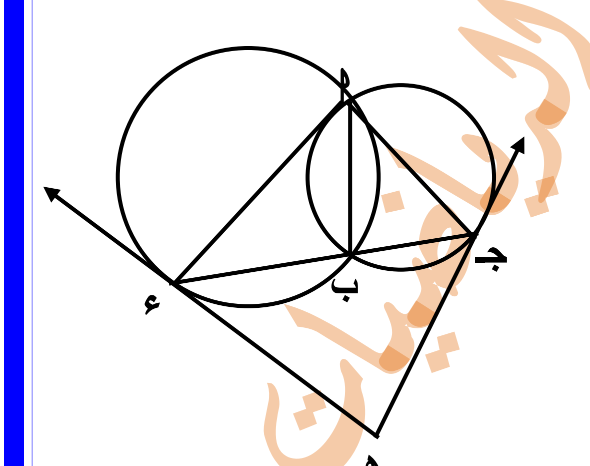
∴ ق (∠ؤ ب جـ) = ق (∠و ؤ ب) [متبادلتان]

∴ ق (∠ؤ ب جـ) = ٣٨°

****

مثـ١٣ــال : فى الشكل المقابل م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ؤ ، ب ، هـ جـ ، هـ ء مماسان
إثبت أن : (١) ق (∠هـ جـ ء) + ق (∠هـ ء جـ) = ق (∠ جـ ؤ ء)
(٢) الشكل ؤ جـ هـ ء رباعى دائرى

الحـــــــــل



∵ هـ جـ مماس

∴ ق (∠هـ جـ ء) = ق (∠جـ ؤ ء) (١)

∵ هـ ء مماس

∴ ق (∠هـ ء جـ) = ق (∠ء ؤ ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن

∴ ق (∠هـ جـ ء) + ق (∠هـ ء جـ) = ق (∠جـ أ ء) + ق (∠ء ؤ ب)

∴ ق (∠هـ جـ ء) + ق (∠هـ ء جـ) = ق (∠جـ ؤ ء) [وهو الطلوب أولاً] (٣)

∴ ق (∠هـ) + ق (∠هـ جـ ء) + ق (∠هـ ء جـ) = ١٨٠° (٤)

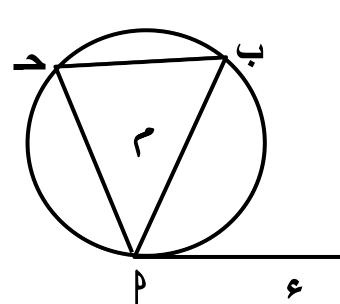
بالتعويض من (٣) فى (٤)

∴ ق (∠هـ) + ق (∠ جـ ؤ ء) = ١٨٠°

∴ الشكل ؤ جـ هـ ء رباعى دائرى

عكس النظرية : إذا رسم شعاع من إحدى طرفى وتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن الشعاع يكون مماساً للدائرة

ففى الشكل المقابل :



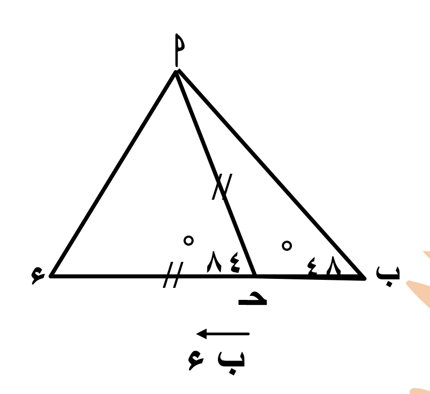
إذا رسم ﻫ ء من أحدى طرفى الوتر ﻫ ب فى الدائرة م ،

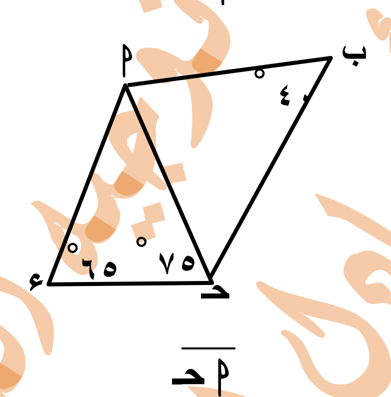
و كان : ق (< ء ﻫ ب) = ق (< ﻫ حـ ب)

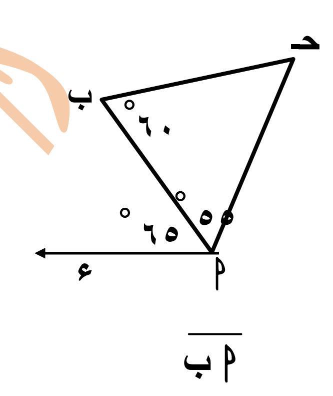
فإن : ﻫ ء مماس للدائرة م

****

تدريب : فى كل من الأشكال التالية بين أن ﻫ ء مماس للدائرة التى تمر برؤوس Δ ﻫ ب حـ :



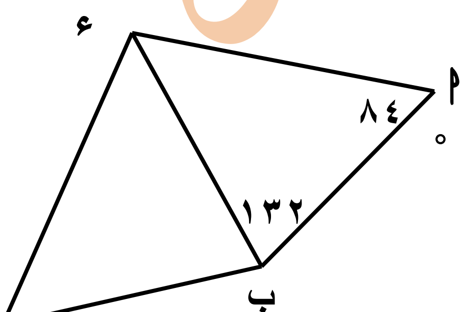




****

مثـ١ـال : فى الشكل المقابل ﻫ ب جـ ء شكل رباعى فيه ﻫ ب = ﻫ ء ، ق (< ﻫ) = ٨٤° ، ق (< ﻫ ب جـ) = ١٣٢° إثبت أن ب جـ مماس للدائرة المارة بالنقط ﻫ ، ب ، ء

الحـــــــل



فى Δ ﻫ ب ء   ∵ ﻫ ب = ﻫ ء

∴ ق (< ﻫ ب ء) = ق (< ﻫ ء ب) = $\frac{٩٦}{٢}$ = ٤٨°

∵ ق (< ﻫ ب جـ) = ١٣٢°

∴ ق (< ء ب جـ) = ١٣٢° ـ ٤٨° = ٨٤°

ق (< ء ب جـ) = ق (< ﻫ) ∴ ب جـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ﻫ ب ء

****

مثـ٢ـال : فى الشكل المقابل ٢ ب جـ مثلث متساوى الاضلاع ‎$\overline{٢ ء}$ // $\overline{جـ ب}$‎

إثبت أن : ‎$\overleftarrow{٢ ء}$‎ مماساً للدائرة المارة بروؤس Δ ٢ ب جـ

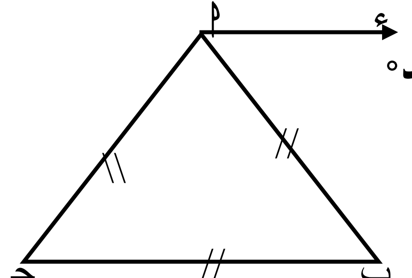
الحـــــــل



فى Δ ٢ ب جـ

∵ ٢ ب = ب جـ = جـ ٢

∴ ق (∠ب ٢ جـ) = ق (∠ب) = ق (∠جـ) = ٦٠°



∵ ٢ ء // جـ ب

∴ ق (∠ء ٢ ب) = ق (∠ب) [متبادلتان]

∴ ق (∠ ء ٢ ب) = ٦٠ °

∴ ق (∠ء ٢ ب) = ق (∠ جـ)

∴ ‎$\overleftarrow{٢ ء}$‎ مماساً للدائرة المارة بروؤس Δ ٢ ب جـ

****

مثـ٣ـال : فى الشكل المقابل ‎$\overleftarrow{٢ هـ}$‎ // ‎$\overleftarrow{ء ب}$‎ ، ق (∠ب ٢ هـ) =٥٥°،ق (∠ جـ) = ١١٠°

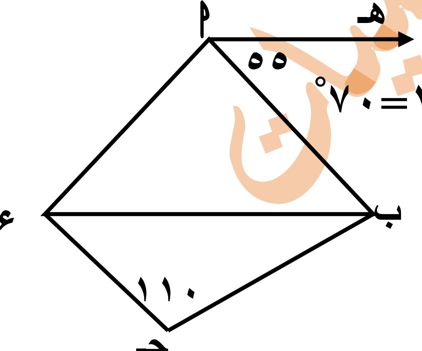
، ٢ ب = ‎$\overleftarrow{٢ ء}$‎ إثبت أن(١) الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

(٢) ‎$\overleftarrow{٢ هـ}$‎ مماساً للدائرة المارة بروؤس الشكل ٢ ب جـ ء

الحـــــــل

∵٢ هـ // ء ب ∴ ق (∠هـ ٢ ب) = ق (∠٢ ب ء) = ٥٥° [متبادلتان]

∵٢ ب = ٢ ء ∴ ق (∠٢ ب ء) = ق (∠٢ ء ب) = ٥٥



∴ ق (∠ب ٢ جـ) = ١٨٠ – [٥٥ + ٥٥] = ١٨٠ – ١١٠=٧٠°

∴ق (∠ب ٢ ء) + ق (∠جـ) = ٧٠ °+ ١١٠°= ١٨٠°

∴ الشكل ٢ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (∠هـ ٢ ب) = ق (٢∠ ء ب)

∴ ‎$\overleftarrow{٢ هـ}$‎ مماساً للدائرة المارة بروؤس الشكل أ ب جـ ء

****



مثـ٤ـال : فى الشكل المقابل $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ قطعتان مماستان ، ق (∠ أ) = ٣٠° ، جـ ب = جـ هـ (١) إثبت أن ب هـ // أ جـ (٢) أوجد ق (∠جـ ء هـ) (٣) إثبت أن جـ هـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

الحل

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق (∠أ ب جـ) = ق (∠أ جـ ب) = $\frac{١٥٠}{٢}$ = ٧٥°

∴ ق (∠ب هـ جـ) = ق (∠أ ب جـ) = ٧٥° [مماسية ومحيطية]

∵ جـ ب = جـ هـ ∴ ق (∠جـ ب هـ) = ق (∠جـ هـ ب) = ٧٥°

∴ ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠أ جـ ب)

∴ ب هـ // أ جـ [وهو المطلوب أولا]

∵الشكل ب جـ ء هـ رباعى دائرى

∴ ق (∠جـ ب ء) + ق (∠جـ ء هـ)=١٨٠°

∴ ق (∠جـ ء هـ)=١٨٠ـ ٧٥° =١٠٥°

∴ ق (∠ب جـ هـ)=١٨٠-[٧٥+٧٥]= ٣٠°

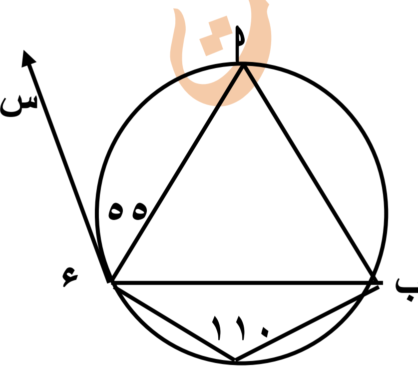
ق (∠ب جـ هـ) = ق (∠ أ)

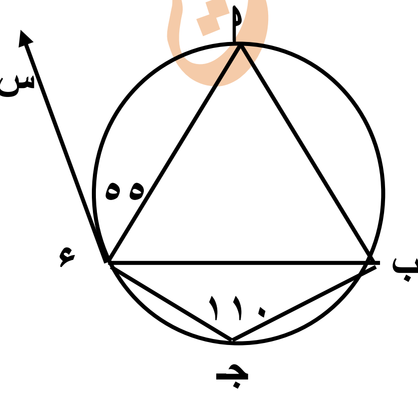
∴ جـ هـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ



مثـ٥ـال : فى الشكل المقابل أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة أ ب = أ ء ، ق (∠ جـ) = ١١٠° ، ق (∠أ ء س) = ٥٥° إثبت أن ء س مماساً للدائرة عند ء

الحل





∵ أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ) + ق (∠جـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° ـ ١١٠° = ٧٠°

فى Δ أ ب ء ∵ أ ب = أ ء

∴ ق (∠أ ب ء) = ق (∠أ ء ب) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

∴ ق (∠أ ب ء) = ق (∠أ ء س)

∴ ء س مماس للدائرة عند س

مثال ٦ : فى الشكل المقابل ؅ب ، ؅جـ قطعتان مماستان ق (∠هـ) = ١١٠° ، ق (∠ب ء جـ) = ٧٠° إثبت أن (١) ب جـ ينصف ∠ ؅ ب ء
(٢) جـ ء مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ؅ ب جـ

الحــــــل

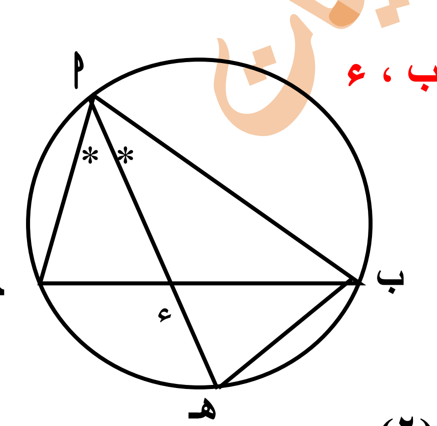
∵ ب جـ هـ ء شكل رباعى دائرى ∴ ق (∠جـ ب ء) + ق (∠ هـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠جـ ب ء) = ١٨٠ ـ ١١٠ = ٧٠°

∵ ؅ ب مماس ∴ ق (∠؅ ب جـ) = ق (∠ ب ء جـ) = ٧٠°

ق (∠؅ ب جـ) = ق (∠جـ ب ء)

∴ ب جـ ينصف ∠ ؅ ب ء



∵ ؅ ب ، ؅ جـ قطعتان مماستان

∴ ق (∠؅ ب جـ) = ق (∠ ؅ جـ ب) = ٧٠°

ق (∠؅) = ١٨٠° ـ [٧٠+٧٠] = ٤٠°

فى Δ ب جـ ء ق (∠ب جـ ء) = ١٨٠ ـ [٧٠+٧٠] = ٤٠°

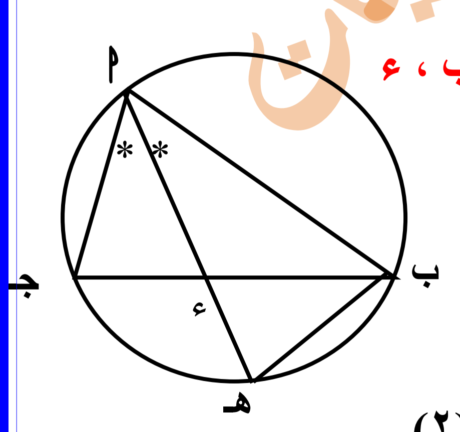
∴ ق (ب جـ ء) = ق (∠ ؅) = ٤٠°

∴ جـ ء مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث ؅ ب جـ

****

مثال ٧ : فى الشكل المقابل ؅ ء ينصف ∠ ب ؅ جـ
إثبت أن ب هـ مماس للدائرة المارة بالنقط ؅ ، ب ، ء

الحــــــل



∵ ؅ هـ ينصف ∠ ب ؅ جـ

∴ ق (∠ب ؅ هـ) = ق (∠جـ ؅ هـ) (١)

∴ ق (∠هـ ب جـ) = ق (∠جـ ؅ هـ)

[محيطيتان مرسومتان على نفس القوس] (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (∠هـ ب جـ) = ق (∠ب ؅ هـ)

∴ ب هـ مماس للدائرة المارة بالنقط ؅ ، ب ، ء

مثـ٨ـال : فى الشكل المقابل ٢ب قطر فى الدائرة ن ، ن جـ نصف قطر عمودى على ٢ب
إثبت أن : ٢جـ مماس للدائرة الخارجة عن Δ جـ ء هـ

الحـــــــل

فى Δ ٢ ن جـ ∵ ن ٢ = ن جـ ، ق (∠٢ ن جـ) = ٩٠°

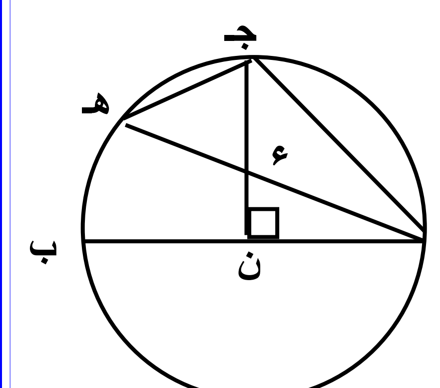
∵ ق (∠ ٢جـ ن) = ق (∠ ن ٢ جـ) = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥°

ق (∠ ٢ ن جـ) = ٩٠° ∴ ق (٢ جـ) = ٩٠°

ق (∠ ٢ هـ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (٢ جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٩٠° = ٤٥°

∴ ق (∠ ٢ جـ ن) = ق (∠جـ هـ ٢)

∴ ٢ جـ مماس للدائرة الخارجة عن Δ جـ ء هـ



****

مثـ٩ـال : فى الشكل المقابل : ٢ ب قطر فى الدائرة م ، ب جـ وتر فيها رسم مماساً يقطع ٢ حـ فى ء ، ق (< ب ء حـ) = ٤٠°
أثبت أن : ٢ ب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ء ب حـ

الحـــــــل

∵ ٢ ب قطر فى الدائرة م ، ب ء مماس لها

∴ ق (< ٢ ب ء) = ٩٠°

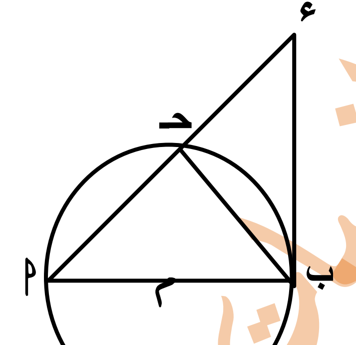
∵ ق (< ب ء حـ) = ٤٠° ∴ ق (< ب ٢ حـ) = ٥٠°

∵ ٢ ب قطر فى الدائرة

∴ ق (< ٢ حـ ب) = ٩٠° ∴ ق (< ٢ ب حـ) = ٤٠°

∴ ق (< ٢ ب حـ) = ق (< حـ ء ب)

∴ ٢ ب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ء ب حـ



****



تمارين

١ ـ أكمل ما يأتى :

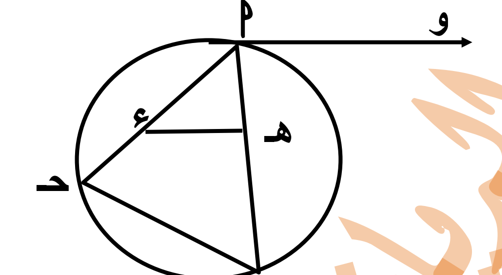
١) الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى ....

٢) قياس الزاوية المماسية = ... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

٣) قياس الزاوية المماسية = ... قياس القوس المحصور بين ضلعيها

٤) قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية ....

٢ ـ فى الشكل المقابل :

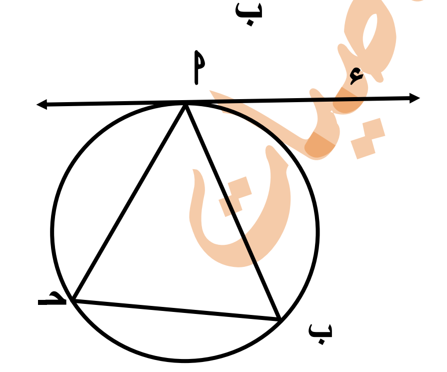


أ ب ، أ حـ مماسان لدائرة

فإذا كان أ حـ // ب ء ، ق (∠ أ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ و حـ ء)

٣ ـ فى الشكل المقابل :

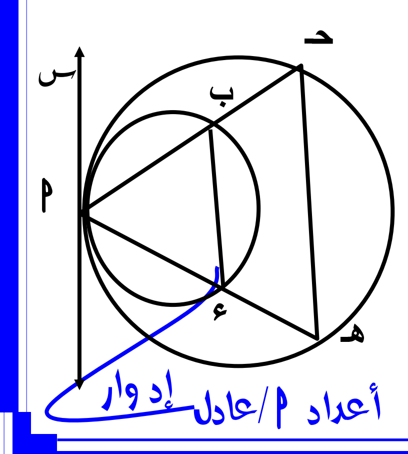


أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، أ و مماس للدائرة ، ء هـ // أ و

أثبت أن : الشكل ب حـ ء هـ رباعى دائرى

٤ ـ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، أ ء مماس للدائرة فإذا كان أ ب = أ حـ

أثبت أن : أ ء // ب حـ

٥ ـ فى الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الداخل فى أ ، أ س مماس مشترك

أ ب ، أ حـ يقطعان الدائرة الصغرى فى ب ، ء

ويقطعان الدائرة الكبرى فى حـ ، هـ على الترتيب

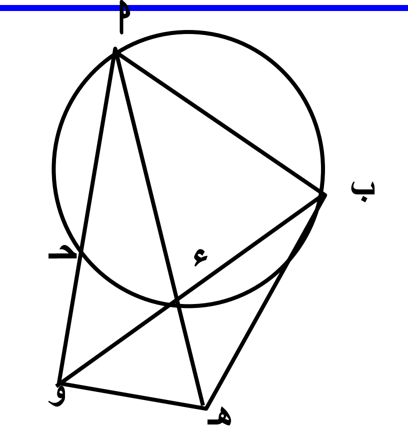
أثبت أن : ب ء // حـ هـ

٦ – فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ حـ وتران فى دائرة ، ء منتصف ب حـ ، ب هـ مماس للدائرة أثبت أن :

(١) الشكل أ ب هـ و رباعى دائرى

(٢) و هـ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ء و



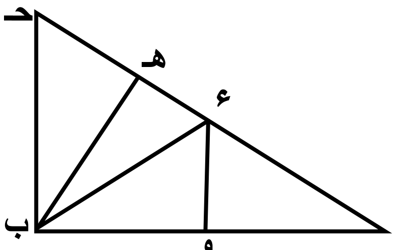
٧ – فى الشكل المقابل :

ق (< أ ب حـ) = ق (< ب هـ حـ) = ٩٠°

، أ ء = ء ب ، أ و = و ب أثبت أن :

(١) الشكل ء و ب هـ رباعى دائرى

(٢) هـ و مماس للدائرة الخارجة للمثلث ب حـ هـ



٨ – فى الشكل المقابل :

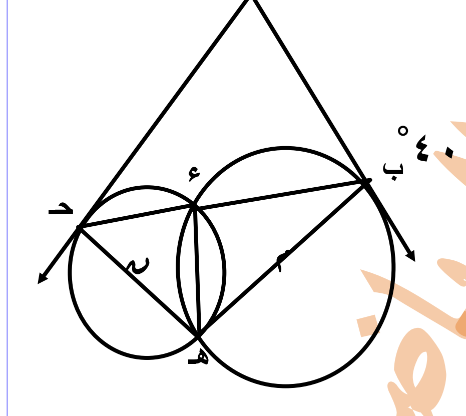
أ ب مماس للدائرة م ، أ حـ مماس للدائرة ن ،



ق (< ب هـ ء) = ٦٠° ، ق (< حـ هـ ء) = ٤٠°

(١) أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ

(٢) أثبت أن الشكل أ ب هـ حـ رباعى دائرى



٩ – فى الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، ء ∈ ب حـ

، ق (< هـ) = ٤٠° ، ق (< أ ء ب) = ٨٠°

أثبت أن أ حـ يمس الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ء

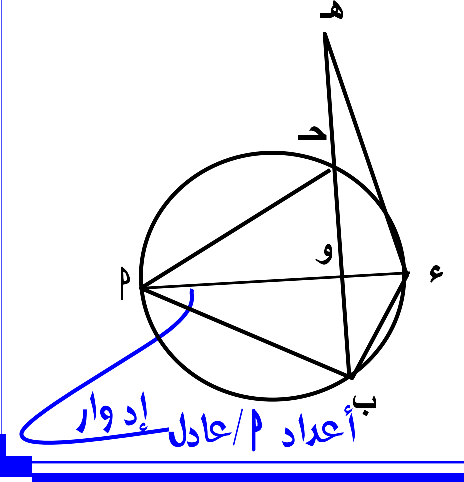
١٠ – فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه أ ب = أ حـ

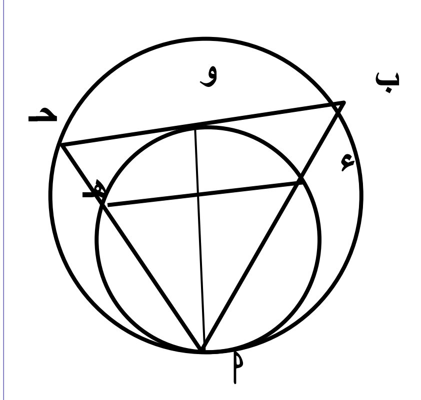
، ء ∈ ب حـ الأصغر رسم للدائرة المماس أ ء

فقطع فى هـ ، رسم ء هـ فقطع ب حـ

ب حـ فى و ، أثبت أن : هـ ء = هـ و



١١ – فى الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الداخل فى م ، $\overline{\text{ب حـ}}$
وتر فى الدائرة الكبرى يمس $\overline{\text{م ب}}$ الدائرة الصغرى
فى و ، $\overline{\text{م ب}}$ يقطع الدائرة الصغرى فى ء
، $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$ يقطع الدائرة الصغرى فى هـ أثبت أن :
(١) $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$
(٢) ق (∠ م ب و) = ق (∠ حـ ب ل)

١٢ – دائرتان م ، ن متقاطعتان فى م ، ب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$ مماساً للدائرة م يقطع الدائرة ن فى حـ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماساً للدائرة ن يقطع الدائرة م فى ء
أثبت أن : $\overline{\text{م ء}}$ // $\overline{\text{حـ ب}}$